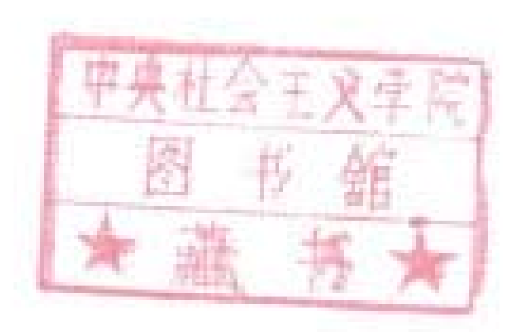
汉译世界学术名著丛书

科学与假设

〔法〕彭加勒著





汉译世界学术名著丛书

科学与假设

〔法〕彭加勒著

叶蕴理译



商务印书館

1989年·北京

汉译世界学术名著丛书

科 学 与 假 设

〔法〕彭加勒 著　叶蕴理 译

商 务 印 书 馆 出 版

（北京王府井大街36号）

新华书店总店北京发行所发行

北京第二新华印刷厂印刷

ISBN 7-100-00521-3/B·64

1930年10月第1版　　开本 850×1168 1/32

1957年10月重印新1版　　字数 117 千

1989年7月北京第5次印刷　　印张 $5^1/_2$

印数 7,000 册　　插页 4

定价：3.05 元

汉译世界学术名著丛书
出版说明

我馆历来重视移译世界各国学术名著。从五十年代起，更致力于翻译出版马克思主义诞生以前的古典学术著作，同时适当介绍当代具有定评的各派代表作品。幸赖著译界鼎力襄助，三十年来印行不下三百余种。我们确信只有用人类创造的全部知识财富来丰富自己的头脑，才能够建成现代化的社会主义社会。这些书籍所蕴藏的思想财富和学术价值，为学人所熟知，毋需赘述。这些译本过去以单行本印行，难见系统，汇编为丛书，才能相得益彰，蔚为大观，既便于研读查考，又利于文化积累。为此，我们从1981年至1986年先后分四辑印行了名著二百种。今后在积累单本著作的基础上将陆续以名著版印行。由于采用原纸型，译文未能重新校订，体例也不完全统一，凡是原来译本可用的序跋，都一仍其旧，个别序跋予以订正或删除。读书界完全懂得要用正确的分析态度去研读这些著作，汲取其对我有用的精华，剔除其不合时宜的糟粕，这一点也无需我们多说。希望海内外读书界、著译界给我们批评、建议，帮助我们把这套丛书出好。

商务印书馆编辑部

1987年2月

目錄

導　言

大凡科学的眞理，对一位膚淺的观察者是無可怀疑的；科学的邏輯是永固的，至于学者們有时会犯錯誤，那是因为他們不知其中的規則。

一切数学的眞理，是用了一連串正确的推理从少数明顯的命題(proposition)推演出來的；不但是我們不得不服从这些眞理，就連那自然界本身亦复如是。它們好像能支配"造物者"，只許它在比較上很少的解答中能有所选擇。因此我們只要有一些經驗，便知道它所选的是什么。从每个經驗中，用一系列的数学演繹法便可推出許多的后果(consequence)，也就是这样从每个后果我們才認識宇宙的一角。

这就是普通一般人，以及略知物理的中学生所想像的科学定理的來源。这就是他們怎样認識实驗和数学的作用。这也是百年前許多学者对这作用所懂得的，那时候，他們夢想借用愈少愈妙的实驗的材料，來說明世界的結構。

人們試略加思索，就可知假設(l'hypothèse)在科学中所占的位置；人們已知数学家旣少不了它，而实驗家也少不了它。因此就生出一个疑問：所有这些建筑在假設上的学問是否坚固的，而人們認为它經不起一陣小風便要傾倒的。作这样的怀疑，还是膚淺的見解。怀疑一切，或信仰一切，都是很便利的兩种解答，因为兩者都可以使我們不用思索。

所以我們对于假設且慢粗淺地加以責难，应該細心審察它的作用；这样我們才能認識它不但是必需的东西，并且它往往是合法的了。我們將見假設可分几种，有的是可以証实的，并且一經实驗証明，就成为真理的淵藪；有的不会遺誤我們，同时好处在能堅定我們的思想，最后有的只是貌似假設，其实不过是一种偽裝的公約(convention)或定义而已。

这最后的一种假設大半見于数学及其相关的科学。这些科学正因此而愈形真确；这些公約是我們精神上一种自由活动的產品，它在这一种范圍里是無障碍的。在这里面我們的精神可以肯定，因为它能頒布法令；但要知道，这些法令僅可頒行于我們的科学中，沒有它們科学將变为不可能；它們不能支配自然界。然而，这些法令是否任意的？不，否則它們將不生效果了。实驗固然讓我們自由选擇，然同时又指示我們以最便利的路徑。所以我們的法令如同一專制聰明的太子，要諮詢参謀会議后才頒布的法令一样。

有人对于在有些科学的基本原則中，这一种自由的公約的特征，引为惊奇。他們曾經想过分地加以推廣，而同时忘却了自由非卽任意之謂。因此他們就成立了所謂唯名主义(nominalisme)。他們自問道，学者是否卽他所自造的定义的傀儡，而他所認为發現的世界是否簡直就是他的私意所創①。在这情形下，科学將或是确实的，但是缺少前途了。

果真如此，則科学將必無能力了。但我們竟見其蒸蒸日上。它如不能使我們知道些实在的东西，这样是不可能的；但它所能达到的，并不是老实的教条主义者(dogmatiste)所想的事物的本身，这

① 参閱 M. Le Roy: Science et Philosophie (Revue de Métaphysique et de Morale, 1901.)

不过是物与物間的关系而已;除这种关系以外,再沒有可知的实在(la réalité)了。

这就是我們將來的結論,然为此我們必須从算術与几何談起,一直談到力学与实驗物理学。

数学推理的性質是什么?眞是我們通常所信为演繹的嗎?把它仔細分析一下,可知大为不然,它在某种范圍內却帶着归納推理的性質,其所以丰裕亦正在此。但它还保存着不少的絕对精密的性質;这是我們在开始就要說明的。

等到既然弄明白数学交給研究者这一种工具之后,那时我們还要討論另一基本概念,就是数学量。这是我們可在自然界中找到的呢,抑或是我們所導引進去的呢?又,果眞是那后一情況,則我們会不会完全弄錯呢?試把我們感覚所得的粗鈍数据和那数学家理想中所称呼的極端复雜而微妙的数学量來比較,我們势必承認一种分歧;所以我們想收罗万有的这个框子,原來是我們手創的;然而我們幷未偶然做成它,我們可說曾經按照尺寸去做的,因此我們能收進事实,同时又能对事实的主要的东西不加改觀。

我們对于世界所支配的另一框子就是空間。几何的基本原理是从何而來?是邏輯学支配我們的嗎?罗巴切夫斯基創立了非欧几里得几何学以証明其不然。空間是否由我們的感官得來的?也不是,因为我們的感官所能揭示的,絕对与几何学家的空間不同。几何学是否來自經驗?深刻研究之后,可見不然。所以我們結論它的原理不过是一种公約;但不是任意的公約,現在如把它轉运到另一世界(我叫它非欧几里得世界,我幷且要把它想出來),我們就得采用別的公約了。

在力学中,我們也將得到相似的結論,幷且我們將知这种科学

的原則，虽然比較直接根据于实驗，但还含有几何公設(postulat)的公約性。到此为止，都还是唯名主义占着勝利，但現在我們且看眞正的物理学如何。这里情况改变了，我們遇見一些别的假設，并可見其何等的丰富。無疑地，表面看來，理論对我們好像是脆弱的，而它在科学史上，又每如曇花一現，但是它們也不能完全消滅，而每一理論总有所殘余。这殘余的东西，正是应当清理的，因为正是那兒而唯独那兒，才是眞正的实在哩。

物理学的方法是建設在归納上的，我們借此可知在先前發生过的外界某种境况畢具时，某現象必可重新發生。如所有的这些境况可以如数重現，則这条原理，就可以放心应用了，但这是从來沒有过的，其中总有些境况是缺少的。我們可以确信这是不重要的嗎？这顯然不是的。这也許似乎对的，但这不是确实一定的。由此見得概率(la probabilité)的概念在物理学上的作用，是何等的偉大了。所以概率的計算不僅是一种消遣和賭博者的引導，而我們应当深究其原理才行。关于这層，我只能給点很不完备的結果，因为这种使我們辨別眞相的空泛的本能很难加以分析。

我以为把物理学家工作的情形研究之后，还要說明他們工作的成績。因此我就在光学与电学的歷史中举了些例子。我們將知弗勒納耳(Fresnel)和麥克思韋(Maxwell)的理論何來，以及安培(Ampère)和那些創造这电动力学(électrodynamique)的学者引用了那一些不自觉的假設。

第一部 数与量

第一章 数学推理的性質

一

数学的科学的可能性本身好像是一种不可解决的矛盾。如果这种科学之为演繹不过是表面的，则它所有的这种嚴密而無疑的正确性何由而來的呢？反之，若說它的一切命題都可用形式邏輯的規則相互引出，則数学豈不变成一种龐大的重复語(tautologie)么？三段論不能告人以眞正新穎的事物，且如所有必來自同一律(principe d'identité)，則所有亦必能归入其中。然則充满許多書中的定理的陈述將不过是 A 卽 A 的各种弯轉的說法而已，这样說人們会同意嗎？

自然，所有的推理都可归根到几条公理(axiome)上，因这是所有推理的起源。假使有人断定这些推理不能化为矛盾律(principe de contradiction)，又如人們也不願認为是一些不能参加数学需要性的經驗事实，則人們还有可能把那些推理列入先驗的綜合判断(jugement synthètique a priori)之中。这样并非解决困难，不过加以洗礼而已。卽使到了綜合判断的性質对于我們不再神秘的时候，然而那矛盾仍不会消滅的，它不过退了一步。三段論推理对于給与它的数据仍是無所添加的，这些数据化为一些公理，而在

結論中人們决不能找到别的东西。

無論什么定理，如在它的証明中不參加新的公理，則必不是新的，推理只能借用直接的直覚法 (intuition) 給我們直接明顯的眞理；它好像只是一个寄生的中人，于是人們要不要問那所有三段論的工具是否單單用來遮蔽我們的借用品的？

我們随便展开一本数学書，便知道其中的矛盾令人更为惊奇；著者在每一頁里有推廣已知的命題的意圖。所以数学方法是否由特別而推及普遍，然則何以又說它是演繹的呢？

最后，如果数学是純粹分析的，或可由少数綜合判断分析出來的，則特殊聪明的人一眼就可能看出所有的眞理。再說吧，人們甚至可希望总有一天会發明一种簡單的言語，來叙述这些眞理；使得常人也能一目了然。

人們如不承認这些結果，就要知数学推理的本身有一种創造性，因此它与三段論实有区别。

兩者的区别应該是深刻的。譬如將兩相等数作同样的均匀运算，便有相同的結果，我們实在不能解释这条常用規則的奧妙。

所有这些推理的形式，不問其可否归入眞正的三段論，总保有分析性，而其能力薄弱也正是这个緣故。

二

我們現在要討論的，已是很陈旧的問題了；賴布尼茲(Leibnitz)已經想証明二加二得四，我們試看他的証法如何。

我假定对数 1 已下定义，又知 $x+1$ 卽加一單位于給定数 x 的运算。

这些定义，無論如何，与推理的進展沒有关系。

其次我对 2, 3 和 4 用下列等式規定:

(1) $1+1=2$,　(2) $2+1=3$,　(3) $3+1=4$,

同样,我用下列式規定 $x+2$

(4) $x+2=(x+1)+1$。

因此我們有:

$2+2=(2+1)+1$,	(定义 4)
$(2+1)+1=3+1$,	(定义 2)
$3+1=4$,	(定义 3)
所以: $2+2=4$。	(即所欲証)

我們不能否認这个推理是純分析的。但假使問数学家,他必答曰:“这不是眞的証明,这不过是一种核驗而已”。人們僅將这兩种純粹公約性的定义做了一种比較,才知道是相等的;至于新的东西,是一点沒有得到核驗(vérification)之所以不同于眞的証明,实因它是純粹分析的,是毫無效果的。其所以無效果,正因其結論只是三段論的兩前提 (prémisse) 之一种譯語而已。反之,眞正的証明是很丰富的,因为里面的結論在某种意义上是比較前提普遍的。

因此 $2+2=4$ 这个等式之所以能被核驗,只因它是特例而已。所有数学中的特别定理都可用这方法核驗。然而数学如竟成为这样的一串的核驗,那它將不成为科学了。例如下棋的人并不見得因为赢了一盤,就發明一种科学。唯有普遍性才成为科学。

人們甚至可說那些准确的科学的目的,正在于免去我們这种直接核驗的辛苦。

三

我們且看在工作时的几何家,而考察他們所用的方法。

这却不是容易的事；單單任意翻开一本書而分析其中某条証明，这是不够的。

由于几何学中的一些前提的作用以及空間概念的來源与性質等都是难题，我們先当撇开几何学。为了同一理由，我們也不能用到微積分学。我們要去找純粹的数学思想，也就是在算術中去找。

此外还要选擇一下；因为在数論最高深的部分，那原始的数学概念已受了極深的提鍊，以致难于分析它了。

所以要在算術的初部中，我們才可找到所要的解釋，然正是在最基本的定理証明中，顯出經典著作的作者用了最不精密而准确的手法。这是不可怪他們的；他們曾受一种必需的束縛，初学者还沒有眞正数学精密性的訓練；他們在那里可能只見到一些空洞的微妙；所以人們如在这上面苛求他們，那不过白費时間；他們要重新按部就班地快点学过的，而这种程序也就是那些科学建設者慢慢地經过了的。

为何要这样長的准备，才能慣于这种完善的精确性，而这好像是聪明人都当賦有的呢？ 这是一个邏輯与心理問題，大有考慮的价值。

然这是我們題外的事，可不贅述；为不失掉我們的目的，我們要把最基本的定理重新証明，且其形式不当是为免去那些初学者扫兴才粗淺的，而是能够满足已有訓練的几何家的。

加法的定义——我假定对 $x+1$ 的运算，即將数 1 加在数 x 上，已先下定义。

且这个定义，無論为何，对于推理的進展，是毫無作用的。

現在我要規定 $x+a$，就是把数 a 加到数 x 上的运算。

假定規定演算法：

$$x+(a-1)$$

则 $x+a$ 的算法可用下式规定：

$$(1)\qquad x+a=[x+(a-1)]+1。$$

所以我們如果知道何为 $x+(a-1)$，便知道何为 $x+a$，因为我在起初已假定人們知道何为 $x+1$，故 $x+2$，$x+3$ 等演算法人們也可陸續地用循环法(par récurrence)規定了。

这个定义值得注意一下，它有一种特别的性質，使它与純粹邏輯的定义已有所区别；事实上等式(1)包含無窮的不同的定义，其中每一定义必待已知前者之后才有意义。

加法的特性——**結合性**(associativité)——我說：

$$a+(b+c)=(a+b)+c。$$

盖 $c=1$ 时此定理是对的；因此可寫为：

$$a+(b+1)=(a+b)+1,$$

此式除符号差别外与上面規定加法的(1)式相同。

今如 $c=\gamma$ 时此定理仍眞，则 $c=\gamma+1$ 时此定理亦眞。

盖由　$(a+b)+\gamma=a+(b+\gamma)$，

人們陸續引出：

$$[(a+b)+\gamma]+1=[a+(b+\gamma)]+1,$$

或照定义(1)有：

$$(a+b)+(\gamma+1)=a+(b+\gamma+1)=a+[b+(\gamma+1)],$$

由此可見用了一串純粹分析的演繹法，証明此定理对于 $\gamma+1$ 亦眞。

故 $c=1$ 时旣眞，则 $c=2$，$c=3$ 等等时，此定理也是眞实的。

可換性(commutativité)——(一)我說：$a+1=1+a$。

今如 $a=1$，则此定理顯然是眞的，人們再可用純粹分析的推

理來核驗如 $a=\gamma$ 时为真，則 $a=\gamma+1$ 亦然；但 $a=1$ 时旣如此，則令 $a=2$，$a=3$ 等等，也应該如此；人們为表达这事，就說那命題是用循环法証明的。

(二)我說：

$$a+b=b+a。$$

此定理对 $b=1$ 已証明如上，人們再可用分析法核驗如它在 $b=\beta$ 时为真，則 $b=\beta+1$ 时亦必如是。因此命題用循环法而成立。

乘法的定义——我們用下列等式來規定乘法：

$$a\times 1=a。$$

$$(2)\qquad a\times b=[a\times(b-1)]+a。$$

等式包含無数的定义；一如(1)式；今 $a\times 1$ 旣經規定，則此式亦可陸續規定 $a\times 2$，$a\times 3$ 等等。

乘法的特性——分配性(distributivité)——我說：

$$(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)。$$

在 $c=1$ 时，人們用分析法檢驗此式之真；其次檢驗如在 $c=\gamma$ 时定理为真，則在 $c=\gamma+1$ 时它也是真的。

这样我們的命題又是用循环法而証明了。

可換性——(一)我說：

$$a\times 1=1\times a。$$

在 $a=1$ 时此乃顯然的定理。

人們可用分析法証明如 $a=\alpha$ 时，此定理为真，則 $a=\alpha+1$ 时它也是真的。

(二)我說：

$$a\times b=b\times a。$$

在 $b=1$ 时，此定理已經証明。人們可用分析法核驗如 $b=\beta$ 时

为眞，則 $b=\beta+1$ 时亦眞。

四

我且把这一串單調的推理停止在这里罢。但正是这种單調最能把那一致而又步步碰到的方法，明白表示出來。

这就是循环証明法。人們先在 $n=1$ 时建立一个定理，然后指出如它在 $n-1$ 时为眞，則在 n 时亦眞，于是人們結論它对任何整数也是眞实的。

剛才我們已經見过用这方法怎样証明加乘二法的規則，此卽代数演算的規則；这种演算是轉变算式的工具，所得各种組合之多，远非單純三段論可比拟；但这仍是一种純粹分析的工具，它是不能告訴我們一点新东西的。假使数学此外再無别的工具，則在它的發展中很快就要停止；但是它可以重新运用同样的方法，就是所謂循环推理法(raisonnement par récurrence)，因此它仍可繼續前進了。

人們若能好好地留意，則可見步步都是这样的推理，而其形式或卽如上文所説过簡單的，或則多少有所改变的。

这实在是最完善的数学推理，我們当再仔細的去研究它。

五

循环推理法的主要特性是在它能包含無数的三段論，而集中在可認为唯一的公式中。

欲明此理，且待我將这些三段論依次說明，它們的排列，讓我打个比方，有如瀑布直瀉下來。

这自然都是些假設的三段論。

已知在数 1 时定理为眞。

但如果对 1 为眞，則对 2 亦眞。

故它对 2 为眞。

但假使对 2 为眞，則对 3 亦眞。

故它对 3 为眞，余依此类推。

由此可見每一三段論的結論可做下一三段論的小前提。

且所有三段論的大前提都可化成唯一的公式。

这就是，如定理对 $n-1$ 为眞，則对 n 时亦然。

可見在循环推理法中，人們僅限于陈述第一三段論的小前提，以及含有以一切大前提为特例的普遍公式。

因此这一串永無止尽的三段論可减縮成为几行的語詞。

現在可容易明白，有如我已說过的，何故某定理的特別結論可用純粹分析的方法去核驗。

我們如不去証明那定理对任何数时为眞，而只要指出好比对 6 为眞，那只証明要建立上述瀑布的前五条的三段論；但如我們要証明定理对 10 为眞，則需九条三段論；再大的数目，所需的条数更多；然此数無論如何大，我們終可达到目的，而这样分析的核驗总是可能的。

虽然，我們無論走得多远，我們終究不能得到一个适用于一切数目的普遍定理——只有它才能作为科学的目的。为此目的則非有無窮的三段論不成，这必須越过那僅僅依靠形式邏輯的分析家的忍耐力还永久塡不满的深涯。

起初我曾問过，何以人們想不出一个足够神通的人，他会一眼看穿数学中所有的眞理。

現在这个問題是很容易回答的了；棋手能做四步五步的預算，

但是無論我們覺得他本領怎样大，他只能准备有限的数目；假使他把这种本事用在算術上，他就不能直接用直覺法看出那普遍的眞理；連为求到一最小的定理，他也必用循环法推想出來，因为这是从有限数到無窮数的推理工具。

这工具总是有益的，因其一方面能任我們的意思一躍而升進数級，一方面又能省却極無味而單調的冗長的核驗，并且这种核驗在事实上也很快地不能实踐的啊。然而遇到以普遍定理为目标时，这工具就成为不可少的了，因为用分析核驗法，虽不能允許我們达到普遍定理，但能使我們不断地接近它。

人們必定以为我們現在所談的算術范圍与微積分学相差太远了，但是剛才我們已知数学的“無窮”观念的重要作用，少了它便無科学，因为也沒有普遍的东西了。

六

循环推理所依据的判断还可用别的方式表示；例如在無窮个相异的整数中，我們可說必有一数較小于其他各数。

人們可很容易地由这一陈述推到另一陈述，而自觉貌似已經証明了循环推理的合法性。

但照这样做下去，人們終必被阻擋着，而必來到一个不可証明的公理，而这公理实卽待証的命題的另一說法罢了。

所以循环推理的規則，决不能变为矛盾原理，这是誰也不能否認的結論。

这条規則又不是从实驗上得來的；实驗所能告訴我們的，不过說这規則好比对数十或首先一百个数为眞，但不能推到一串無窮尽的数目上去；只能推到这一串数或多或少的但总是有限止的部

分。

但是，如所有的問題，只是这点，則用矛盾律已足济事，它可使我們推演無論多少的三段論，然其所以失敗，只在于想把無窮的三段論納入唯一的公式中，只在正对着無窮时，也正因此連經驗也無力量了。这条規則，旣非分析法所能証明，而又非經驗所能核驗的，正是先驗的綜合判断的实例。人們又决不可在这里好似对于少数几何的前提認为这是一种公約。

然則我們何故势必服从这种判断，有如金科玉律呢？原來这不过是表現精神力量之偉大，它能断定假使某种动作一次可能，則同一动作又可重复無窮次。精神对这种强大的力量具有一种直接的直覚，而經驗不过是給它一种利用的机会，因而能够有所領悟。

然有人說：如那粗糙的实驗不能証明循环推理之合法性，那么助以归納法的实驗，仍是一样嗎？我們陸續看到某定理对1，2，3等等数都眞的时候，于是我們可說那定律已顯然成立，正如那些以極多数但有限的观察为根据的一切物理学定律一样有效。

我們要認明其中有与通用的归納法酷似之处。然而也存在着主要的区别。应用在物理科学中的归納法总是不确实的，因它是建立在宇宙有普遍的程序的信仰上的，但这种程序是超人的。反之数学归納法或卽循环証明法是必然支配着我們的，因为它只是精神本身的一种特性的肯定啊。

七

我已經說过数学家極力想把他們所得的命題推廣起來，而我不必另找例子，就照剛才已証明的等式：

$$a+1=1+a,$$

其次我又曾用以求得等式：

$$a+b=b+a,$$

此式当然較为普遍。

所以数学也可像别的科学，从特殊推到普遍。

这件事在我們以前开始这个研究时，好像是不可了解的，然自剛才我們發現循环証明法和通用的归納法的相似点以后，我們就覚得其中再沒有什么神秘的了。

無疑地，数学的循环推理与物理的归納推理，兩者的基礎虽各有不同，但兩者的步趋，却是平行一致的，向一个方面走的，換一句話說，兩者都是从特殊推到普遍。

我們試再仔細地討論一下。

为要証明等式：

$$(1)\qquad a+2=2+a,$$

我們只需应用兩次下列規則：

$$a+1=1+a,$$

且演算如下：

$$(2)\quad a+2=a+1+1=1+a+1=1+1+a=2+a_{\circ}$$

从(1)式用純粹分析的方法演繹出來的(2)式幷不是一簡單的特例：它是另一回事。

所以人們甚至不能說：在数学推理的眞正分析与演繹的部分是照普通的字义說由特殊而進于普遍的。

(2)式之兩边不过是(1)式之兩边較繁的組合，而分析的用处只是把其中的元素分开而研究它們相互的关系。

所以数学家用“建筑的方法”而“建筑”那些逐漸繁复的組合。他們再用分析的方法，从这些組合，从可說这些集合回到其中所含

的原始元素，他們乃知这些元素間的关系，而由此推想到这些集合本身間的关系。

这却是一种純粹的分析步驟，但这不是由普遍進于特殊的步趋，因那些集合当然不能認为比較元素更为特殊。

人們对于这种“建筑”的方法曾予以注意，这是很对的，而且人們認为这是准确科学進步的必需与充足的条件。

这个方法是必需的，不錯，若就以为充足了，那还不見得咧。

如要一种建筑是有益的，不是徒耗心血的，而且是可以助人向上的梯階，則第一要有一种統一性，使人不見其徒为元素的堆叠而已。

說一句正确的話，就是要使我們覚得考慮这种建筑品比較考慮它的各元素本身为有益。

这益处何在？

例如为什么对总是可以分成多数三角形的多边形來推想，而不对这些三角形去推理呢？

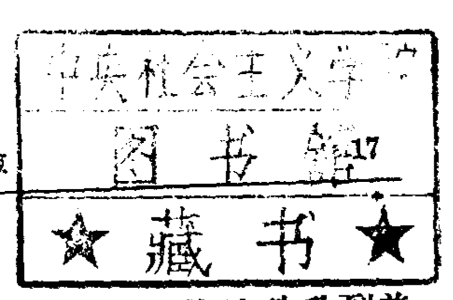
此因有任何数边的多边形有些特性是人們可以証明的，証明以后，人們便可直接应用此理于任何特別的多边形。

反之，若直接去研究那些由多边形分成的三角形間的关系，往往要費許多心力才能發現这些特性。倘若我們已知普遍定理，那就省力多了。

所以一建筑之有益与否，是在其能否与其他相似的建筑幷列，成为同一种(genre)的各类。

假使說四边形不僅是兩个三角形的叠合物，那正因它是多边形的一种。

幷且还要能够証明同一种的特性，而不必对每一类的特性一



一証明。

为要达到这步，則必須經过一級或多級的路程，从特殊升到普遍。

这种"用建筑"的分析法，幷不迫使我們从上面走下來，而讓我們站在同一的水平綫上。

我們只能用数学的归納法，才能上進，只有它才能告訴我們新鮮的事物。如果沒有那种在某些方面有別于物理归納法但同样有效的数学归納法的协助，則建筑就無力去創造科学了。

最后，請注意这种归納法的可能成立，全在于同一的演算可重复無窮次。所以棋戲决不能成为一种科学，因为同一盤棋各子的走法是不相同的。

第二章 数学量与实驗

人們如要知道数学家的所謂連續統(un continum)究作何解，这是不应向几何学來提問的。几何家多少总要表現他所研究的圖形，然他的表象只是他的工具而已；他研究几何时，少不了要用廣延(etendue)对象等，正如他用粉筆來表示；所以人們对于那粉筆的画綫所生出來的小弯曲之無足輕重，正如他所用的粉筆之为白色一般。

至于純粹的分析家就不怕这个缺点。他把数学中一切与它無关的元素取出，而他能回答我們的問題：数学家所推想的那連續統，眞是什么呢？許多对本行会用心的数学家早已解答此題；譬如在丹勒利(J, Tannery)所著的"含一变数的函数論導引"(Introduction à la théorie des Fonctions d'une variable)一書中已可

見得了。

我們先自整数排列談起；今在二相續的整数中加入一个或多个的中間数，再在二相續的新数中加入中間数，如是依次类推以至無窮。由是乃得無窮的数項，此即所謂分数，有理数，或可約数。然此尙不足；在这些已經是無窮的数項中，当再插入所謂無理数或不可約数。

在未更進一步以前，我們先要注意一事。就是这样想出來的連續統，不过是按着一定順序排列成的个体的集合，虽是無窮，但是彼此排斥的。这里不是普通观念，假定在連續統的元素之中有一种使成为整体的密切关系，認为不是点成立于綫之先，而是綫反先于点。从那著名的公律，即連續統者，乃是多样性的統一，人僅見多样性存在，而不見統一。分析家照他們那样規定連續統也有他的道理，因为自从他們追求嚴密性，他們一直是站在那上面來推理的。然由此已可見眞正的数学的連續統实与物理家和形而上学家的連續統有天壤之別了。

人們也許說数学家倘僅以此定义为滿足，則無异做字的傀儡了，他們当詳細說明那中間数項究为何物，說明他們的插入法，并且証明这样作是可能的。然这样便錯了，在他們的推理中，这些中間数項的唯一特性① 是在它們的前后排列的特性；所以也唯有这特性才可加入定义中。

因此人們可不必顧慮那些中間数項的插入的方式；另方面誰也不会怀疑这作法是可能的，除非忘記这最后字用几何家的話簡直就是無矛盾的意思。

---

① 以及包含在特別的公約中的特性，这些公約是用以規定加法的，而是以后要說的。

虽然，我們的定义尙未完善，我將在这長段插話之后补說。

不可約数的定义——柏林派数学家，特别是克龍勒克(M. Kronecker)先生，他毫不借用别的什么材料，只用整数來从事建設那分数和無理数的連續排列。照这样看來，数学的連續統將不过是精神的純粹創造品，与經驗毫不相干的了。

他們对于有理数的概念，似乎幷無困难，他們主要極力想求出不可約数的定义。然在未介紹他們的定义以前，我当加一声明，以免那些不熟悉几何学家的習慣的讀者的惊奇。

数学家所研究的不是物(l'objet)，而是物与物間的关系；只要物与物的关系不变，則物虽变易，他們也不关心。物質对他們是不重要的，使他們感兴趣的只是物的形式。

倘若人們不記得这事，就不会懂得杜德金(Dedekind)先生把不可約数用一种符号來表示，这与一般信为幷且几乎可測量而可感数量观念，大不相同。

現在且看杜德金的定义是什么：

可約数可按照無窮的方法分为兩排，它的条件便是凡第一排的任何数必較大于第二排的任何数。

有时第一排中有一数較小于其他各数；例如將一切大于 2 和数 2 本身数排在第一排，又把一切小于 2 的数排入第二排，則顯然 2 是第一排的最小数，此理甚明。所以数 2 便可作为这种分配的符号。

反之，也許在第二排中有一数大于其他各数；例如將凡大于数 2 排入第一排，將 2 和一切小于 2 的数排入第二排。这里，数 2 还是可作为这种配置的符号。

然有时也許在第一排中，無一数小于其他各数，以及在第二排

中無一数大于其他各数。例如將平方較大于2的一切可約数排入第一排，將平方小于2的一切数排入第二排，大家知道这里沒有一个平方适为2的数。在第一排中顯然無一数小于其他各数，因为尽管某数的平方接近于2，人們总还可以找到別一个可約数，而其平方更接近于2的。

照杜德金的看法，不可約数$\sqrt{2}$不过是可約数特別分配的式样的符号而已；而在每一分配的方式中，相应地必有一可約数或不可約数來做为符号。

但这就算滿足，那就未免太不顧到这些符号的來源了；此外尙須說明为什么人們会給这些符号一种具体的存在，而在另方面，对于分数不就开始有困难了嗎？如在事前，我們不知道一种可認为無窮尽分割的物質，亦卽一种連續統，則我們还会有这些数的概念嗎？

物理的連續統——人們到此就要問数学連續統的观念，是否簡單地由于实驗而來的。果然如是，則实驗的粗糙的数据——这就是我們的感覚——將是可被測量的了。人們可能相信这是对的，因为近年來有人努力去測量，并且还發明了一个定律，名曰費希勒(Fechner)定律，而根据这个定律感覚与刺激的对数成正比例。

然而我們如再仔細考察那定律所根据的实驗，則所得結論必將大为不然。例如人們覚得曾观察过10克重的A物和11克重的B物，兩者產生同一的感覚，而B物的重量，在感覚上又無別于12克重的C物，但人們对于重量A与重量C的差別就容易区別出來。所以实驗所得的粗糙的結果，可用下列关系表示：

$$A=B, \qquad B=C, \qquad A<C。$$

这些式子可認为物理的連續統的公式。

这里和矛盾律有一个嚴重的不符合，我們認为有消除这一困难的必要，因此才不得不發明数学的連續統來。

所以人們勢必結論說这种观念是精神一手創造的，但这也是实驗所提供它的机会。

我們不能相信等于同一第三物的兩物会互不自相等的，正因此我們才來假定 A 有别于 B，而 B 有别于 C，但因我們感官的不灵，所以不能辨别它們。

数学連續統的創造——

第一階段——迄今为止，为說明事实起見，我們可能只要在 A 与 B 中任意插入少数保持离散的数項。我們如利用一种工具，來补助我們薄弱的感官，例如顯微鏡，那就怎样呢？剛才不能辨别的数 A 和数 B 兩項，現在对我們似有分别了；但在已經区别的 A 与 B 中將又加入新 D 項，又無法把它來同 A 和 B 区别了。尽管用最改進的方法，那由实驗得來的粗糙結果总表示一种物理的連續統特性，同时帶着內在的矛盾。

非得在已經辨别出來的数項中，不断地插進新的数項，而且这个工作当無窮尽地繼續進行下去，我們才可避免那事。除非我們能想像一种極精密的仪器能把物理的連續統分成离散的元素，好比用天文鏡測視天河，分出無数的小星一样，否則我們不会想到要停止这种工作的。但我們不能理想到这个；因为我們总是靠感官來用仪器，譬如用眼睛窺視顯微鏡放大的物像，因此这种物像总含有一种視覚的性質，因而含有物理連續統的特性。

直接看到的一种長度，和經顯微鏡放大一倍的半長度是毫無分别的。全部的东西和它的部分是同質的，这又是一种新的矛盾，或者說是这样的，倘若数項是假定有限的；事实上因一部分所含的

数項顯然較少于全部，所以部分是不能和全部相似的。

一待数項認为無窮多，則矛盾消失；例如整数集合尽可認为与集合中的一部分的偶整数集合相似；事实上，每一整数对应着一偶整数，这偶整数即該整数的二倍。

但这不僅是为了避免这个含在实驗数据中的矛盾，精神才來用無限的数項來創造一連續統的概念。

此中情形正与剛才整数串連中發生的一样。我們有能力設想一單位可加入于一团的單位中；这完全是靠經驗，才使我們有机会練習这种能力，于是習慣成自然；但从这时起，我們覺得我們的权力是無限的，且可無窮地数下去，虽然我們所数的一向只是有限数的东西。

同样，一等我們在一級数中的相續的兩数中插入平均数，我們就覺得这种工作可以繼續至于無窮，且可說毫無內稟的理由足以使我們停止的。

为言語簡便起見，且讓我規定凡是按照可約数的排列定律所組成的整个数項集合叫做第一級的数学的連續統。令如在那里面再按照不可約数的組成定律，插入新数項，則我們可得所謂第二級数学的連續統。

第二階段——我們还只走了第一步；我們已經說明一些第一級連續統的來源；然現在要知道何以那些还不足，而何以要發明不可約数。

人們試想像一根綫，它便不得不含有物理的連續統的特征，就是說須联想到那根綫具有一定寬度才能把它表象出來。所以兩綫就好像是兩条很窄的帶子，且如滿足于这样粗糙的想像，則顯然兩綫交叉时，必有公共占据的一部分。

然而純粹几何家作了更大的努力：他虽一方面不全然脱离感官的帮助，然他想达到一种無寬狹的綫，与無大小的点的概念。为此目的他只有把綫認为漸形收窄的最后限度，点是面積漸形縮小的最后限度。所以我們那兩条交叉的綫，無論怎样細而窄，总有一共同的面積，条子愈細，面積愈小，而它的限度卽几何家所謂点子。

因此之故，人們說兩綫相交必有一共同点，而这个眞理似乎是直覚的了。

然如人們把綫看作第一級連續統，卽如在几何家所画的綫上只有用有理数的坐标的点子，則这个眞理未免含有矛盾了。这个矛盾將是很明顯的，如人們肯定圓与直綫的存在。

事实上，顯然地，如只認以可約数为坐标的点子是实在的，則內切于正方形的圓和这正方形的对角綫將不能相交，因为相交点的坐标是不可約数。

这样还不够，因为这里僅有少数是不可約数，而非完全是不可約数。

今試把一直綫分为二条半直綫。每一半直綫可認为一定寬的条子；則这兩条子互相搭叠，因在它們之間不应有間隙。它們的共同部分可認为一点，倘若我們理想那条綫愈縮愈細，以至把它分作兩截时，它們的共同交接点，仍只一点，这差不多是直覚的眞理；这里我們就遇到克龍勒克先生的观念了；他認为凡一不可約数可視为兩排有理数的共同交界。

这就是第二級連續統的來源，它是眞正的数学連續統(le continu mathématique)。

撮要——撮要言之，精神有創造符号的能力，因此它能建設数学的連續統，而这不过是一些符号的特別系統而已。只是为了免

去一切矛盾，它的权力才是有限制的；然精神如無經驗給它以理由，則也不会用它的。

在我們所討論的情形中，这种理由就是从感官的粗糙的数据中引出的物理連續統（le continu physique）的概念。但这概念未免牽及許多矛盾，而是要依次免除的。因此我們勢必想出漸趋繁复的符号系統。至今，我們所說到的系統，不僅無內在的矛盾——这正如上面我們已經过的各階段一样——且与那些所謂直觉的命題不生矛盾，这些直觉的命題是从多少經过提鍊的經驗的概念中引出來的。

可量的数量——迄今为止，我們所研究的量都是不可測量的；固然，我們能說这量比那量或大或小，然不能說到底大几倍或小几倍。

事实上，至今我只研究了数項排列的順序。然在应用上这是不够的。我們要学習來比較任何二数項間的間隔。必須有了这个条件，連續統才变成可量的数量，而算術的运算也就可应用上去了。

这事又非有一种新的与特別的公約帮助不成。人們將公認在 A 和 B 兩数項間的間隔等于 C 和 D 兩項間的間隔。例如我們曾在上文以整数級排列为起点，又曾假定在相繼的兩項之間夾以几个中間項；那么这些新数項照公約將認为等距离的了。

这里是对兩数量的加法下定义的方式；因为假使照定义 AB 間隔等于 CD 間隔，則 AD 間隔照定义將是 AB 加 CD 之和。

这个定义是大有任意性的。但也不完全是的。因它服从某种条件，例如它服从加法的結合律与可換律。然只要所选定的定义适合这些定律，則选擇就無所謂，而無庸去把它十分明确化了。

各种注意——我們可以提出几条重要的問題來討論。

一、精神的創造力是否由于数学的連續統的發現而告竭尽了呢？

不；斗布畦乃蒙(Du Bois-Reymond)先生的著作明顯地証明了这点。

大家知道数学家能区别各級的無窮小，第二級的無窮小不特是絕对的無窮小，且对于第一級無窮小也是無窮小的。我們不难想像一种分数級的甚或無理数級的無窮小，于是我們又尋得数学的連續統的尺度，而这正是我們在前几頁所討論的对象。

但还有別的事情哩。有些無窮小对于第一級無窮小是無窮小，但对于第 $1+\varepsilon$ 級的無窮小，反而是無窮大，不問 ε 小得如何。这就是在級数中我們插進的新数項，且如照剛才我所用过的虽不大通行但还方便的言語，我可說人們又創造了一种第三級連續統了。

我們本不难追求下去，但將是無謂的精神玩意兒；且想出來的符号，將無应用之可能，而無人要去注意的。由討論各級無窮小而引出的第三級連續統本身已少实用而無地盤，而几何学家对它不过認为是一种簡單的好奇而已。人們的精神受經驗的必要性的支配，才施展他的創造技能。

二、旣有数学的連續統的概念之后，人們就可免去有如產生这概念的矛盾否？

不，讓我來举例說明。

必須是很通博的人才覺得凡是曲綫不必顯然要有一切綫。事实上，如果人們認为曲綫和直綫是極細的兩条帶子，人們总可使它們有一共同的小部分碰到而不相交。然后我們再想像这兩条帶子縮小以至于無窮細，則二者共同的部分永远可以存在，等到了可說

是到某限度时，这兩条綫只有一共同点而不相交，就是說兩綫只是相接触。

假使几何家作这样的推想，不問其有心或無心，將与上面我們已証明兩綫相交只得一点的道理实在相同，而他的直覚似乎也是合法的。

但这也許就是騙他的。人們可以証明有些曲綫并無切綫，倘若这綫是規定为第二級分析的連續統。

無疑地，用像我們上面研究过的巧法子，或亦可免除矛盾；但这种矛盾旣然只有在特別情形中才碰到，大家便不管它了。与其設法把直覚与分析調和起來，人們寧願牺牲其一，而分析数学旣是嚴密的学問，人們便归罪于直覚法了。

多維的物理連續統——在上面我曾研究过由我們感官的直接数据或卽由費氏的实驗的粗糙的結果生出來的物理連續統；我并已証明那些結果是总結在矛盾的公式中：

$$A=B, \qquad B=C, \qquad A<C。$$

現在我們看这个概念是怎样推廣的，并如何能由此生出多維的連續統的概念。

設有任何兩团的感覚。或者我們可加以辨別，或者我們不能辨別，有如在費氏实驗中十二克的重量可別于十克的重量，但不能別于十一克的。我不必用別的东西來建設多維的連續統。

今試把各团的感覚叫做“元素”（élément）。这与数学家的点相仿佛；但这也不是完全相同的东西。我們不能說这元素是無大小的，因为我們不能把它和鄰近的元素区別。因此它似乎被包圍在云霧里一般。拿天文学作比，我們的“元素”就如星云，而数学上的点子就如星星一般了。

这个既已説明，如果人們能由一任何元素來到任何另一元素，中間經过一連串相繼續的而前后不能辨別的元素，則这些元素的系統就可形成一連續統。將这一連串比作数学家的綫，正如孤立的元素比作点子一般。

在未進一步以前，先將所謂分割(une coupure)下一定义。設有一連續統C，試取出其中的若干元素，而暫認为它們不屬于这連續統。这些取出的元素的集合就总而名之曰分割。有时C借此又重分为許多不同的連續統，而所余的一团元素不再成为唯一的連續統。

于是在C上有A和B二元素，我們当把他們認为屬于二不相同的連續統，我們其所以能看出來，因为决不能在C中找得一連串从A到B相繼續的元素，且每一元素与前一元素又不可辨別，除非这串連中的某一元素不能与分割中諸元素之某一元素辨别出來，因而不能被排出去。

反之，也許那成立了的分割不足以重分連續統C。为要把物理的連續統分类，我們正得要去观察何种分割才是合乎重分之用。

如果物理的連續統C可用一种分割重分，分成有限数而互相可辨別的元素(故既不成为一个連續統，又不是許多的連續統)，我們就説C是一維的連續統。

反之，如C只能用那本身也成为連續統的分割重分，我們就説C是多維的。倘只要用一維的連續統的分割就够了，我們就説C有二維；倘只要用二維的分割就够了，我們就説C有三維，余依次类推。

这样，多維的物理連續統的概念是被規定了，这全靠这件很簡明的事实，即二团感覚有时是可以辨別的或有时是不能辨別的。

多維的数学連續統——至于 n 維的数学的連續統的概念，自然也可用我們在本章开始已研究过的方法推引出來。大家知道，这种連續統中的一点，可用 n 个不同的数量即所謂坐标來規定。

这些量不必总是可测量的，例如在有一种几何学的分支中人們無視于这些量的測量，而僅研究如何知道好比在曲綫 ABC 上，是否 B 点在 A 点与 C 点之間，而不是要知道弧長 AB 是否等于弧長 BC，或是它的二倍。这种数学名曰拓樸学(analyse situs)。

这是一門很有体系的学說，它曾吸引許多几何学家去研究，因而發明了一系列可注意的定理。它和平常几何定理不同处，即在于它純粹是屬于定性的，且如这些圖形被一位不精巧的画师將各部分比例大大地改变，甚至將直綫画成多少有点弯曲的綫，那些定理还是保持眞实的。

这是当人們想在我們剛才所規定的連續統中引入了度量时，于是这种連續統才成为空間，而几何学誕生。但这事且留在下章再研究罢。

第二部 空 間

第三章 非欧几里得几何学

凡一結論必先有前提，这些前提，或本身卽明顯的，故無須証明，或僅根据別的命題才能成立，但由于我們旣不能这样追究至無窮，則凡演繹的科学，特別是几何学，必先建設在几条不可証明的公理上才行。故凡几何学的專書的公式开始就陈述这些公理。但是在这里也要有所区別的；有些公理例如"等于第三数量的兩个数量必互相等"幷非几何学的命題，而是分析学的命題。我認为它是*先驗的*分析判断，我不去理会它。

然对于別的專屬于几何的公理，我就要認眞地研究一下了。一般專書中明白地陈述三个公理：

一、經过二点只能作一直綫；

二、直綫是兩点間最短的距离；

三、自一点只能引一直綫，和一給定的直綫平行。

虽然人們常省去証明那第二公理，但可把它自其它二公理和其他更多的默認的公理中演繹而出，这且待以后再來說明。

人們久想証明那第三公理，卽所謂欧几里得公設(postulatum d'Euclide)，然总是白費了心力。人們对于这种幻想所耗費的努力，眞是令人不可思議的。等到十九世紀初叶，有兩位大学者，差不多同时，一位是匈牙利人鮑耶(Bolyai)，一位是俄罗斯人罗巴切

夫斯基(Lobatchevsky),他們用一种不可反駁的形式成立这个証明是不可能的;他們差不多替我們擺脫了那些沒有公理的几何發明家;从此法國科学院(Académie des Sciences)每年只接到一二种新的証明論文了。

但問題还未完全結束;不久就有黎曼(Riemann)先生發表了著名的論文,題为"几何学之基本假設"(Über die Hypothesen welche der Geometrie zum Grunde ligen),問題才有了大進步。

这本小册子引起許多近代的著作,稍迟我將述及,其中尤以白耳太密(Beltrami)与赫尔莫慈(Helmholtz)的著作要提出說明。

罗巴切夫斯基几何学——倘若欧几里得公設可从别的公理導出,当我們不承認这公理,但又承認那些别的公理,則顯然地人們必將得互相矛盾的后果了;所以不可能在这一些前提上,建立一种自圓其說的几何。

这正就是罗氏所做过的。他开始先假定:

人們可自一点引出許多直綫和給定的一直綫平行。

此外他仍旧保存其他的欧氏公理。从这些假設他乃演繹出來一系列的定理,其中不特毫無矛盾,且他創造的几何学的嚴密邏輯实可与欧几里得几何媲美。

这些定理,自然是与我們所習用的大为不同,而乍看上去,还不致引起怀疑。

譬如三角形的三角之和总是小于二直角,而这和数与二直角之差則与三角形的面積成正比例。

要想画一圖形与給定的圖形相似而不相等,这是不可能的。

又如分一圓周为 n 等分,自各分点引一切綫,則这 n 切綫將形

成一多边形，只要这圆的半徑不太大；如其太大，則彼此不能相交。

現在不必多举这些例子罢。罗氏諸命題与欧氏諸命題已毫無关系，但它們也同样地互相合乎邏輯联絡着的。

黎曼几何学——我們試設想有一無厚薄的生物所生存的世界；又假定这些“無窮扁平”的动物都是在唯一的平面內，而不能走出來的。又假定这世界与别的世界相距很远，以免受其影响。当我們正在做这些假設时，我們不妨再假定这些动物具有理性，并且相信它們有研究几何学的能力。这样，它們对于空間一定只能看做是二維的了。

現在且假定这些理想的动物虽是無厚薄的，但是具有圓球形的样子，而不是平的，而这些球形的动物都生長在同一的球上，并不能走出的。然則它們將建立何种的几何呢？第一，它們自然还是看那空間是二維的；直綫对于它們实即球面上兩点最短的距离，此卽大圓周的一弧綫，一句話，它們的几何將是球面几何学。

他們所謂的空間，就是这永远脫离不了的球面，在这上面表演着他們可以認識的一切現象。他們的空間將是無限界的。因它們在球面上可以一直向前走而不停止，但这空間將是有限的；在那上面虽無終端可尋，然可以打一个圈子。

那么，黎氏几何学却是推廣到三維的球面几何。德國的数学大家为建立他那种几何，不單走來便拋棄了欧几里得公理，并連第一公理：从二点只能作唯一的直綫也丟掉。

从球面上的二給定点，普通僅可通过一个大圓周（此卽如我們方才所見的那些理想的动物所認識的直綫），然而也有个例外：如此二点是在对徑上的，則由此二点，可通过無窮数的大圓圈。

同样，在黎氏几何中（这至少是黎氏几何的各形式之一如是），

由二点僅可通过唯一的直綫,但有时亦可通过無窮数的直綫。

这里黎氏几何与罗氏几何有一种相对立的地方。

例如三角形的三角的和是:

在欧氏几何中等于二直角;

在罗氏几何中小于二直角;

在黎氏几何中大于二直角。

由一給定点所可引与一給定直綫相平行的直綫数是:

在欧氏几何中等于一;

在黎氏几何中等于零;

在罗氏几何中等于無窮。

此外,我們要加說一句:黎氏的空間是有限的,虽然是無限界的,这兩个名詞的意义与上面所說过的相同。

常曲度的面——虽然,还有一个可能的反駁。罗氏与黎氏的定理是毫不矛盾的;但無論从这兩种几何的假設中所導出的后果怎样多,他們在未將所有的后果尽得以前,他們势必停止下來,不然,其数將是無窮了;难道他們再向前推演,他們就不会遇到一种矛盾而后休么?

这种困难在黎氏几何学中是沒有的,只須人們以二維空間为限;事实上我們已見过那黎氏几何無异于球面几何,这几何不过是普通几何的一分支,当然毋庸討論。

白耳太密先生同样把罗氏二維的几何归入只是普通几何中的一分支,也反对过有关它的反駁。

且看他究竟是如何做到的吧。假設在一面上有一任何圖形。試想这圖形是画在一种可屈折而不可伸縮的布上的,而这布便緊貼在这表面上,使得当这布移动而变形时,这圖形上的各綫也随着

变形，但不改变長度。一般这个可屈折但不可伸縮的圖形是不能換位而不致脫离这表面的；但有一些特別的面对于这种动作是可能的，此卽常曲度面。

今試再將我們上面的比喻來談，幷設想那些無厚度的生物是生長在这一种的面上，于是它們就要認为能保定圖形的各綫長度的圖形运动是可能的事了。反之，这样的运动对于生在一个曲度可变的面上的無厚度的生物，便是無稽之談了。

这种常曲度面可分为二种：

一种是正曲度的，可变其形而緊貼在球面上。所以这种面上的几何，变为球面几何，卽黎氏几何。

另一种是負曲度的，白耳太密先生曾証明这些面的几何卽罗氏几何。故黎氏与罗氏的二維几何仍屬于欧氏几何。

非欧几里得几何的釋义——这样一切关于二維几何的反駁都消滅了。

我們也不难把白耳太密先生的推理推廣到三維几何。那对于四維几何也不退却的人，对这也自然沒有困难，但这种人是很少的。所以我情願用另法來講吧。

設有我名之曰“基本平面”的平面，且制定一种字典，使每个名詞有兩行相对应的解釋，好像那有兩种語言的普通字典有兩种同义的字一样形式。

空間……在基本平面以上的空間的部分。

平面……与基本平面相交成直角的球面。

直綫……与基本平面相交成直角的圓圈。

球体……球体。

圓圈……圓圈。

角……角。

二点的距离……基本平面与經过此二点的正交圓的交点，以及此二点的非調和比率(le rapport anharmonique)的对数。

等等……等等。

然后試將罗氏几何的定理用这字典翻譯，有如用德法合璧字典翻譯一篇德文一样。这样我們就得普通几何的各定理。

例如有一罗氏定理："三角形的三角之和小于二直角"可譯为："如一曲綫的三角形的三边是經延長后与基本平面相交成直角的圓弧綫，則这曲三角形的三角之和必小于二直角"。这样，無論如何推引罗氏的假設的后果，人們始終不致遇到矛盾。事实上，如罗氏的二个定理是互相矛盾的，則借用我們的字典所翻出來的二譯文勢必亦然，但这些譯文是普通几何的定理，而沒有人疑惑普通几何是会有矛盾的。我們这个信仰是从何而來？并且是否合理？这个問題我可不能在这里談，因为說起來就要拉長了。所以我上面所提出了的反駁，現在一点也沒有了。

这还不算完。罗氏几何固然能具体地解释，但并非一种空洞的邏輯的練習，它还有許多的应用；我在这里旣無暇談到这些应用，也不能談到克朗(Klein)先生和我个人从它所推出的微分綫性方程積分法。

况且这种解释不是唯一的，人們尽可編制許多同上面相似的字典，都只須經过簡單的"翻譯"，就可將罗氏几何的定理变为普通几何的定理。

內涵的公理——試問在一些几何学專書中所明白陈述出來的公理是几何学的唯一的基礎嗎？人們試看在依次把它們拋去之后，那些与罗氏、欧氏、黎氏理論有共同性的几个命題还是成立，人

們就知其不然了。这些命題必須建設在几何家不去陈述而僅承認的前提上。設法把它們从經典的証明上清理出來，这是很有趣味的事。

弥耳(Stuart Mill)以为一切定义必包含一公理，因为下定义时，人們已內涵地肯定那被規定物(l'objet défini)的存在了。这样就未免說得太远了；在数学中人們对一物下了定义后，少不了再要証明它的存在，有时其所以省去这种手續，是因一般讀者都容易自去补充。我們不可忘記这"存在"一个字对于数学中的物与对于物質的物是有不同的意义的。一个数学中的物可以存在，只須它的定义的本身或与先前認可的命題都不發生矛盾。

弥氏这个观察虽不能应用在一切定义上，然对于一部分的定义是正确的。有时人們对于平面的定义是如下：

平面是一种面(surface)，在那面上諸点中的某二点联結的直綫是完全在这面上的。

这定义顯然內涵着一个新的公理；誠然，人們可把它改換，这也許还好些，但为此必要把公理明白地陈述才行。

别的定义也可以引起并非不重要的迴思。

譬如二圖形相等的問題：凡是可以把二圖形叠合起來則必相等；为要將兩圖形叠合起來，則必先移动其一，一直到它能够接触和另一圖形吻合为止；但应怎样移动它呢？假使我們發此疑問，人們一定要答道，移动时要如那不变形的固体，不可变易圖形才行。因此仍顯然归到原有的問題，而是轉圈子(cercle vicieux)了。

其实这个定义并沒有定出什么來；对于住在只有流体的世界上的生物，它是毫無意义的。假使它对于我們好像是很明白的，那是因为我們对于天然的固体的特性是習見的，而这天然的固体与

那各向不变的理想固体，是沒有大区别的。

虽然，这定义無論怎样不完滿，总是含蓄一种公理。

一个不变形的圖形运动的可能性，不是本身明顯的眞理，或至少它只能像欧几里得公設那样，而不是像先驗分析的判断那样。

此外当研究几何学的定义和証明的时候，人們覚得势必無証明地承認不僅这种运动的可能性，并且还要承認它的几种特性。

第一这是在直綫的定义中就可看出的。人們从前所給与它的定义都不大好，而那眞正的定义却是暗示在用到直綫的一切証明中的那一种：

“有时一不变圖形的运动也許是这样的：凡屬于这圖上某綫的各点不动，同时在此綫外的各点則移动。凡这种綫就命之曰‘直綫’”。我們在这条陈述中已特意把那定义与其內涵的公理分开了。

有許多的証明，例如三角形之相等，由某点引一直綫垂直于它直綫之可能性，都假定有許多可省得陈述的命題，因为它們势必承認在空間有用某种方式移动一圖形的可能。

第四种几何学——在这些內涵的公理中，有一条是很可值得注意的，因为倘若把它抛棄，人們还可構成第四种几何，与罗氏黎氏和欧氏的三种几何一样的有一致性。

为要証明人們总可由 A 点引一与直綫 AB 相垂直的直綫，人們設想有一繞 A 点而动且原始与直綫 AB 相重合的直綫 AC；于是人們將此綫繞 A 点而轉，一直來到 AB 的延長綫上为止。

这样人們假定兩个命題：第一这种旋轉是可能的，其次卽可轉到这兩綫互相延長的直綫上而后止。

如人們只承認第一命題，而否認第二者，人們便要得到比罗氏

与黎氏几何更为奇异的一系列定理，但这也是不会互相矛盾的。

我只叙述那些定理中的一种，但我并不选择那最奇异的：一真正的直綫可以自相垂直。

索弗斯·李(Sophus Lie)定理——內涵地導入經典的証明中的公理的数目，是远比所需要的为多，人們曾想把它們减少到最少数。希尔伯脫(Hilbert)先生好像曾对这問題給出确定的解答。首先人們可以先驗地問这种减縮是否可能，假使那必需的公理的数目和理想的几何的数目不是無窮的。

索弗斯·李的一个定理支配着这里整个討論。我們可这样地陈述它：

假定人們承認下列的前提：

一、空間是 n 維的；

二、不变形的圖形的运动是可能的；

三、这圖形在空間的位置必需 p 个条件方可确定。

于是符合这些前提的几何学为数將是有限的了。

我并可加說：如 n 是已給定，則人們可指定 p 的最高限。

所以人們如承認运动的可能性，則人們僅能發明有限数的(甚至少数)三維几何学。

黎曼几何学——但是这个結果似乎是被黎氏反駁了的，因这位学者曾建立無数不同的几何，而普通所称的黎氏几何学不过是个特例而已。

他說：一切要看人們对于一曲綫的長度的定义如何。但这种長度的定义的方式是多極了，而每一个都可作为一种新几何学的起点。

这是完全对的，不过大半这些定义与那在李氏定理中認为可

能的不变形的圖形运动，是不符合的。所以这些黎氏几何縱然有許多好地方，但永远不过是純粹分析的，是不能有如欧氏几何学那样可証明的。

希尔伯脫的各种几何学——最后魏翁勒斯(Veronese)与希尔伯脫先生曾想出更新奇的几何，他們名曰“非阿基米得几何”(la géométrie non-archimédienne)。他們舍去阿基米得公理，而建筑那些新的几何，根据这公理，凡以够大的整数乘一給定長度，終必超过所先給定的任何大的長度。在一非阿氏直綫上普通几何的点子都存在，但尙有無窮的点子夾在其中，这样一來，那老派几何家認为相鄰接的兩截段之間，現在就可插進無窮数的新点子。一句話，用前章的說法，非阿氏的空間不再是二級的連續統，而是三級的連續統了。

关于公理的性質——大半数学家把罗氏几何認为不过是一种簡單的邏輯的奇巧；有些人則更進一步。他們以为旣然有許多种几何学，則我們的几何是的确眞实的嗎？無疑地，实驗告訴我們三角形的三角之和等于二直角；但这因我們所运算的三角形都是太小的緣故；根据罗氏，則其相差与三角形的面積成正比例：然則当我們計算較大的三角形时，或当我們的測量更精密的时候，这种差別就可被我們感覺得了嗎？由此以观，欧氏几何只是暫时的几何而已。

为討論这个意見，我們先要問几何公理的性質为何。

这是否有如康德所謂先驗綜合的判斷？

于是它們旣然用那样大的力量來支配着我們，以致我們旣不能設想相反的命題，又不能在它的上面建立理論的体系。非欧氏几何也將沒有了。

为对这事信服，我們可举一真正的先驗綜合的判断，例如我們在第一章已知其重要作用的那一种：

如对1定理为真，又如人們已証定理对$n+1$亦真，只須对n为真，則这定理对任何正整数都真。

其次人們試不用这种命題，而加以否認，同时为建立一种謬誤的算術，有如非歐氏几何——那是人們不会达到目的的，甚至在起始时，人們还会把这些判断認为分析的了。

况且，再把我們那無厚薄的动物的幻想來談吧；倘若那些动物，具有我們的理性，我們决不能相信它們竟采用与其經驗相反的欧几里得几何。

然則我們应該結論几何的公理就是实驗的真理嗎？但人們不是对那理想的直綫和圓周实驗的；人們只能用实在的物質实驗。然則拿什么实驗作为几何基礎呢？这却是容易回答的。

我們在上面已經知道我們推理时总是把几何的圖形認为好像是固体似的。所以几何学所借重于实驗的东西，实卽这些固体的性質。

光的性質和它的直綫傳播，也曾經是引出一些几何的命題的机会，尤其是投影几何的命題，由此以观，人們就会說：度量的几何卽固体的研究，而投影几何卽光的研究。

然这里却存在着一种不能克服的困难。如果几何学是一种实驗的科学，則不成为一精确的科学，而它就要被不断地修改了。那还有什么可說的呢？从今天起，它就会承認錯誤，因为我們知道世界上沒有嚴密不变的固体。

然則几何学的公理既非先驗綜合的判断，亦非經驗的事实。

这原來是些公約 (conventions)；在一切可能的公約中，我們

的选擇是受了經驗的事实引導；但它仍是自由的，它为免去一切的矛盾起見，才有所限制。因此尽管那些决定公設的取舍的实驗定律是近似的，那些公設还是嚴密的眞实。

换句話說，几何学的公理（我幷不談算術的）其实不过是偽裝的定义。

由是人們对于这个問題当作何感想：欧氏几何是眞实的么？

这个問題毫無意义。

这好比問"米达"度量衡（spstéme métrique）是对的，而旧制度是錯的；笛卡兒式的坐标（coordonnées cartesiennes）是对的，而極坐标是錯的了。这不是这种几何比那种几何眞；只有比較上便利不便利而已。

而欧氏几何是幷且永久是便利的几何：

一、因为它是最簡明的。它这样不單是因我們精神的習慣关系，或因我們对于欧氏的空間有一种我說不出的直接的直覚；它本身确是最簡明的，有如一次多項式是比二次多項式較簡那样，球面三角的公式比平面三角的公式复雜，而即使一位不明白这些几何公式的意义的分析数学家看上去，也有如此的感想。

二、因为它与自然界的固体的性質頗能符合，这些固体是我們的四肢和眼睛所能接近到的，幷用它們來制造測量的仪器。

第四章 空間与几何

我們先开始談一个小謬論。

今如有一种生物，具有我們同样的精神与感官，但先前毫未受过教育，它們在适当选擇的外界中，能接受到一些印象，使得它們

建設与欧氏几何不同的几何，且能把这外界的現象都放在非欧几里得的空間或竟放在四維的空間里。

至于我們，則我們的教育都來自現实的世界，假使一旦置身在这新世界中，則我們不难把其中一切的現象都归入我們的欧几里得空間。倒过來，如果这些生物都轉运到我們的世界中，則它們必把我們所有的現象归入非欧几里得的空間。

我还有什么可說的；我們稍微努力一下便也可这样做的。今如有人竭尽畢生的力去做，或許可能达到第四維的想像。

几何的空間与表象的空間——人們常常說外物的影像是局限在空間里的，甚至說唯有这条件，那些影像才能形成。人們也說，这个为我們感觉与表象(la représentation)准备好的框子(cadre)的空間，与几何家所掌握的空間是完全相同的。

前句話对于作如是观的聰明人，一定感到很奇异。但要看看他們是否受了一些幻想的影响，而这个幻想用深刻的分析，便可消除的。

首先那眞正的空間的特性是什么？我所指的是那作成几何学的对象的空間，而我名之曰“几何的空間”。下面是几个主要的特性:

一、它是連續的；

二、它是無窮的；

三、它是三維的；

四、它是均匀的(homogéne)，卽是各点都是恒等的；

五、它是各向同性的(isotrope)，卽是經过同一点的各綫都是恒等的。

現在我們試把它和我們的感覚的与表象的框子相比，我并把它叫做表象的空間(lespace représentative)。

視覚的空間——先試考慮一种純粹視覚的印象，而是由于在網膜(rétine)底部所形成的物像而來。

略加分析，便知这个物像是連續的，但由于僅是二維的，这已經把几何的空間，和所謂粹純視覚的空間区别出來了。

另方面这物像是放在有限界的框子里的。

最后，还有一个也是重要的区别：这个純粹視覚的空間不是均匀的。不管在網膜上形成什么像，網膜上的各点沒有同一的作用。那黄斑点决不能認为与網膜边緣的一点相同。事实上不僅是同一的对象在那斑点上產生更强烈的印象，并且在整个有限框子里，居中的点子和近边的点子是不相同的。

再深加分析，無疑地我們將知这視覚的空間的連續性和它的二維空間，也無非是一种幻覚；所以它与几何的空間相差將更远，但我們对这姑不必多說，我們在第二章中已把由这种注意所生的后果討論得很够了。

但視覚可以讓我們估計物的距离，所以又能观察第三維了。但是大家知道这种第三維的視覚，实卽对光时所費力的感覚，以及双目所应作的收斂度以明視一物的感覚。

这是一些筋肉的感覚，与給我們头二維空間的概念的視覚大为不同。所以这第三維对于我們，和其他二維有不同的作用。所以所謂完全視覚的空間不是各向同性的空間。

誠然，它恰好有三維；意卽在我們視覚的元素中（这至少是有助于形成大小的概念的），知其三則其余都可完全規定；若照数学的話說，这是含三独立变数的函数。

然而我們再仔細審視一下。对于第三維我們曾用二种不同的方式來發覚它：卽用对光的費力和双目的收斂度。

無疑地，这兩种指示总是符合的，在他們之間有常定的关系，或換数学話說，就是測量这二种筋肉感覚的变数，在我們看上去，并非各自独立的，或者，为省用那已很精致的数学概念起見，我們仍可回到第二章，而把同一的事实陈述如下：

如 A 与 B 二收斂度的感覚是不可辨别的，則同时和它相伴随的 A' 和 B' 二对光的感覚也將不能辨别了。

但这里可說是一种經驗的事实；如作反面的假定，先驗上是毫無妨碍的，又如眞有这相反的假定，如这二筋肉的感覚有各不相依存的变动，那末我們將要多計及一个独立的变数，而对于"完全視覚的空間"，我們將認为四維的物理的連續統了。

我还要加說一句，这就是一种外部的經驗的事实。我們尽管可以假定有一生物，具有与我們同一的精神和感官。它是生在某世界中，那里光綫射到它的身上时，必經过形式复雜的折光媒質。于是供給我們視察距离的兩种指示，不再联有常定的关系了。一个在这样世界中受感官教育的生物，对于完全視覚的空間必將認为四維空間了。

触覚的空間与动覚的空間——"触覚的空間"比視覚的空間更为复雜，而与几何的空間相差更远了。因此对于触覚用不着去重复那对于視覚的討論。

然除了視覚与触覚的数据之外，还有别的感覺，它对于空間概念的萌芽同样有帮助并比較更大。这是大家都知道的，这种感覺是随着我們所有的动作而生的，这就是普通所称的筋肉感覚。

与此相对应的框子就成为所謂"动覚的空間"(l'espace moteur)。每一筋肉生出一种特别的可增可减的感覚，因此我們全体筋肉的感覺所依存的变数当等于我們所有的筋肉数。因此我們有

多少根筋，动覺的空間便有若干維了。

我知道人們將說，筋肉的感覺之助成空間的概念，这是因在我們对于每一运动的方向都有一种感受，而这也就是感覚中的一部分。如果这是眞的，如果某筋肉的感覚要伴有这种方向的几何的感受才得發生，則几何的空間將眞就是支配我們的感覚的一种形式。

但当我自己分析我的感覚时，我毫不覚得是如此的。

我所看到的，就是关于同方向运动的感覚，是用簡單的观念結合方式联系在我腦中的。我們所謂"方向的感受"，卽是由这种結合而來。所以这种感受决不是在唯一的感覚中可找得到的。

这种結合是很复雜的，因为随着四肢的位置，同一筋肉的收縮能对应着多种大不同的方向的运动。

这个結合是顯然已具有的了；有如其他各种的观念的結合，它是一种習慣的結果；这結果本身也是由許多的經驗而來；毫無疑問地，假使我們的感官教育是在另一不同的环境中受到的，而在那里我們受着不同的印象，則必生出相反的習慣且我們的筋肉的感覚必按照其他的定律互相联系着了。

表象的空間的性質——由此可見，在視覚的、触覚的与动覚的三种形式之下的表象空間是与几何的空間大大不同的。

它既非均勻的又非各向同性的；人們甚至也不能說它是三維的。

人們常說我們把外界所察辨的对象，"投影"于几何的空間；我們把它"局限"(localiser)起來。

这有意义否，而有何意义？

这个意思就是說我們把外界的事物表示于几何的空間嗎？

我們的表象、只是我們的感覺所仿造出來的，所以只能和它們列入同一的框子中，意即在表象的空間中。

我們之不能把外物表示于几何的空間，正如画师不能在一平面的圖上画出物的長、闊、高三維來。

表象的空間只是几何的空間的影像，这个影像經了一种透視改变形狀，而我們只是按照这透視学的道理才能表示物体。

所以我們并非把外物表示于几何的空間，我們只是把这物体当作在几何的空間而对它推理。

另方面，当我們說把某某物件"局限"于空間的某某点，这是什么意思？

这就是說，为达到这物，我們把要做的动作表示出來；而不說为表示这些动作，必將其本身投影于空間，以及空間的概念当因此先存在。

当我說我們把这些动作表示出來，我只說我們把和它相伴的筋肉的感覺表示出來，这些筋肉感覺是毫無几何的性質的，它們因此毫不含蓄空間概念先在的意思。

狀态的变化与位置的变化——但有人將說，如几何的空間观念并不支配着我們的精神，又不是我們的任何感覺所能供給我們的，則此念又何自而生的呢？

这就是我們要研究的，而这要稍費时間才成，但我可把我所尝試的解釋先扼要說來。

我們任何的感覺，孤立起來，决不能引起我們一种空間的观念，我們只是把这些感覺發生的次序的規律研究之后，才得到此念。

我們最初是知道我們的印象是会变更的；但在我們所發見的

变更中，我們馬上就可以有所区别。

我們有时說形成这些印象的对象，是变了狀态，时而說它們是变了位置，或者它們只是移动了。

不問一对象是变态或变位，对于我們总是同样的表达出來：即印象集合中的一种变化。

然則我們如何能够去区别它們哩？这是容易明白的。如果只是位置的变易，我們的动作可以恢复原始的印象集合，这些动作使我們再在同一的相对的地位正对着运动的物体。这样我們矯正所發生了的变化，而用相反的变化恢复原狀。

譬如是有关視覚的，有一物在眼前行动，我們可“随之以目”，而利用眼球的运动可使物像永久落在網膜的同一点。

这种动作是我們良知的，因这是有意的，而且有筋肉感觉相伴的，但这不等于說我們把它表示于几何的空間。

这样，变位的特性之有别于变态，是在于它能用这方法被矯正。

人們因此有时可用二种方式从印象集合 A 來到印象集合 B：一、这是無意的而不受筋肉的感覚，这是当物体移动时有的情形；二、这是有意的而有筋肉的感觉的，这是物虽不动然我們对他有相对运动时的情形。

果然如是，則由 A 集合到 B 集合的歷程只是位置上的变易。

由此可知視覚与触覚，如無“筋肉的感官”的协助，决不能給我們空間的概念。

不但是这个概念不能來自唯一的感觉，而是來自“一串的感覚”，并且一个不动的物体永不能有，因为它既不能就自身的运动矯正外物变位的效果，它便絕無理由去和态的变化区別。倘若它的运动是無意的，或毫無感覚相伴，它也不能得到这种概念。

补偿的条件——有一种补偿(compensation)能使兩不相关的变易互相矯正,像这种的补偿怎样是可能的?

今如有一已知几何的人,他必这样推想:

如要發生补偿,当然要一方面外物的各部分,另方面我們的感官的各机構,經了这兩种变易之后,仍恢复其原有相对的位置。为此,外物的各部分也必互相保存其相对的位置,并且我們的感官的各部分互相也須这样。

換句話說,在第一种的变易中,外物应如不变的固体的移动,而在矯正第一种变易的第二种变易中,我們身体的全部也須这样。

按照这种的条件,补偿就可以發生。

但我們尙不知几何学的人,因为我們对于空間的概念尙未形成,所以我們不能做那样的推理,我們不能先驗地預料这种补偿是否可能的。然由經驗知道有时这是做得到的,而就是根据了这件經驗的事实,我們才能从位置的变化中辨别出狀态的变化。

固体与几何——罗列在我們四周的万物之中,有些常常受一种移动,而这种移动同时可受我們自身的相关的动作之矯正,这就是固体。

其他形狀可变的物件,除非例外,不能有这般的移动(只有位置之变易,而無形狀之变易)。倘若物体移动同时变易其形狀,那末我們就是用适当动作,再也不能把我們的感官的各机構移到与此物原始的相对的位置;因此我們再也不能重新建立原始的一团印象。

这只是以后,屢經新試驗之后,我們才学得把变形的物体分为若干較小的部分,那各部分都能按照固体的規則移动。这样我們把变形(déformation)与其他变态有所区别;在这些变形中,每一

部分只是受可以矯正的地位之变易，但全体所受的变动則較深切，再也不能用一种相关运动(movement corrêlatif)矯正了。

像这种的概念已是很复雜的了，而其發現在比較上已是迟了；幷且如果固体的观察未曾教導我們辨别位置的变易，則这概念必不能產生。

所以自然界中若無固体，亦必無几何学了。

还有一个解釋，也頗有注意的价值。設有一固体先占据位置 α，其次來到位置 β；在第一位置时，它使我們感受印象集合 A，而在第二位置时，印象集合 B。今設又有第二固体与第一个有不同的性質，例如有不同的顏色。我們也假定它由 α 到 β，在 α 时使我們感受印象集合 A' 到 β 时感受印象集合 B'。

一般 A' 集合与 A 集合必無相同处，B 集合与 B' 集合亦然。所以由 A 集合到 B 集合与由 A' 集合到 B' 集合这兩种的变易，本身一般是毫不相同的。

虽然，对于这兩种变易，我們都認为是移动，或更好点，我們認为同一的移动。这是怎样的一回事？

这簡單地是因为它們可以被我們身体上同一相关的运动矯正。

所以这是"相关运动"才在这兩現象中成立唯一的联絡，否則我們永想不到把它倆接近起來。

另方面，我們的身体，利賴关節和筋肉，方可以做出無数的不同的动作；但它們都不能"矯正"外物的变动；倘若这样，那末只有我們全身，或至少我們感官的各机構加入行动时，都一致行动，意即像固体那样常保其各部的相对的位置而不变。

撮要：

一、第一我們要区别兩种現象：

有些是無意的，又無筋肉之感覚伴随的，我們認为來自外物；这是外界的变易；

有些，其性質适与上相反，而來自我們本身的动作，这是內部的变易。

二、我們注意这每一种現象的某一些变易可被它种相关的变易所矯正。

三、在外界的变易中，我們区别那些在别种的变易中有一个与此相关的变易就叫做移动；同样，在內部的变易中，我們区别那些在第一种的变易中有与此相关的变易。

由是利賴了这种互反性，我們对諸現象的一个特別种类下定义，叫作移动。就是这些現象的定律作成几何学的对象。

均匀定律——在这些定律中第一就是均匀定律。

假定因外界变易 α，我們由印象集合 A 來到印象集合 B，其次被一有意的而相关的运动 β 矯正 α，使我們仍归于集合 A。

今假定另有外界的变易 α'，使我們重新由 A 到 B。

于是經驗告訴我們，这个变易 α' 有如 α 可用有意而相关的动作 β' 矯正，且此动作 β' 和矯正 α 的动作 β 对应着同一的筋肉感覚。

有了这事实，所以人們平常說空間是均匀的，且是各向同性的。

人們也可以說某动作發生之后，可再發生至二次，三次，如是类推，而不改其特性。

在第一章中我們曾研究过数学推理的性質，我們已知对同一运算重演至無窮次数的可能性之重要。

数学推理的功效全靠这种的重复性；所以这是利賴了均匀定律，它才能建立在几何的事实上。

为了完全起見，除均匀定律之外，还要加上無数相似的定律，我也不必贅述，但数学家可用一句話扼要地說許多的移动成为"一群"(un groupe)。

非欧几里得世界——假使几何的空間是一支配着我們每个个別考慮的表象上的框子，則人們將不能解除这框子來表示一影像，且我們絲毫不能变易我們的几何学。

但其实不然，几何学不过是这些影像前后相繼續的定律的撮要。于是尽可想像一連串的表象，与我們尋常的表象处处相似，但其相繼續的定律与我們已習用者不同。

于是人們可想到如有一种生物，它的教育就是在这些定律遭变的环境中受的，則它們必另有一种与我們不同的几何学了。

譬如在一大圓球中的一世界中有如下的定律：

其中的温度是不一致的；中部最高，而距心漸远則温度漸降，当我們到了圍住这世界的球面上便减到絕对零度。

我再把这温度变动之定律明确一下。設有半徑为 R 的有限界的球；r 是自某点至球心的距离。則該点的絕对温度將与 R^2-r^2 成正比例。

我再假定在这世界中，所有物体皆具有同一的膨脹率，因而任何的一条尺的長度与其絕对温度成比例。

最后，我假定一物由一点移到温度不同的另一点后，它能立即与其新环境的温度相平衡。

在这些假設中，絲毫沒有矛盾的或不可想像的。

于是一可动物距有限界球面愈近，則其形狀也变得愈小了。

第一我們要注意，在我們習用的几何学的观点上看來，这世界固然是有界限的，但对于这上面的居民，則是無限的了。

蓋当它們要走近那有限的球面时，它們漸漸地降冷，因此縮小。它們的脚步也漸漸的小，因此它們永不能达到有限的球上。

对于我們，几何学不过是研究不变形的固体运动的定律；对于这些理想生物，便是研究剛才我說过那随温度差别而变形的固体运动的定律了。

無疑地，在我們的世界中，天然的固体受了寒热之后，也發生形狀或体積的变化。但是在我們建立几何学的基礎时，却把这种变化忽略去了；蓋因它們旣是很微小的，又是不整齐的，所以我們認为是偶然的事。

但在这假設的世界中，則大为不然，而这些变化却按照整齐的而極簡單的定律。

另方面，这些居民身体上各固体部分也受同一的形狀与体積的变化。

我还作一假設；我假定光綫經过不同的屈折环境，且其折光率与 $R^2—r^2$ 成反比例。在这情形下，容易看出光綫不是直的而是圓的了。

为要把前說加以証实，我尙須說明在外物的位置的某种变易，可被这理想世界上有知覚的生物用相关运动矯正；而这是为的要恢复那有知覚生物所有的原始印象集合。

事实上，假定某物移动时，非如不变的固体的变形，而正如一固体按照上面說过的温度定律，受着不相等的膨脹而变形。为省便起見，請把这种的运动叫做非欧几里得的移动。

如一有知覚的生物在旁，則它的印象將被該物的移动所改变，

但它如能有合式的动作，則这印象仍可还原的。这最后只需此物和那有知覺生物的总体（看作一体）能作这些特別移动的一种，这些特別移动即我剛才所称的非欧几里得的移动。人們如假定这有知覺生物的四肢与其世界中的其他物体按照同一的定律膨脹，則这事就是可能的了。

在我們習用的几何上，虽然这些物体移动时是变形的，且其各部分不再保持其相对的位置，但是我們將去看那有知覺生物的印象又变成一样的。

事实上，各部分的相互距离虽能变更，然起初相抵触的部分最后仍是相抵触的。所以触覺的印象并未变易。

另方面，如計及上文关于光綫的折光与曲度的假設，則視覺的印象也將沒有变易了。

所以这些理想的生物同我們一样，要把它們所親身經歷的現象分类，并在其中辨别出來"位置的变易"，这是可用有意的相关动作去矯正的。

它們如建設一种几何，这將与我們的不同，我們是研究不变固体的运动的；它們的几何是它們能这样辨别的位置变易，而这实即"非欧几里得的移动"，这就是非欧几里得几何。

所以和我們一样的生物，但它的教育是受在这样的世界里，則其几何学將与我們的不同了。

四維世界——人們旣能表示非欧几里得世界，同样也可表示四維世界。

視覺，縱然用一只眼睛，与眼球的筋肉运动的感覚联合起來，便足使我們知道三維的空間了。

外物的影像画在我們的網膜上，它是二維空間的圖画；这是透

視。

但因这些物件是动的，有如我們的眼睛会动，我們对同一物体可从各种相異的观点依次看見許多的透視。

同时我們發覺由一透視來到另一透視时常有筋肉的感覚相伴。

如果自透視 A 到透視 B，与自透視 A' 至透視 B'，这兩种經过都有同一筋肉的感覚相伴，我們把它倆互相比拟而認为同性質的动作。

其次再研究这些动作互相組合的定律，我們知道它們形成一群，而其結構与不变的固体的运动相同。

但我們已知这是从这群的特性我們才引出几何的空間与三維空間的概念。

这样我們明白如何三維空間的观念会从这些透視的景物產生，虽然其中每一个只有二維，这因为它們是按照某定律繼續下去的。

好了，一如人們能在一平面上作三維的圖形的透視，人們也可在三維(或二維)的圖画上做四維的圖形的透視。这对于几何学家不过是一种玩意儿而已。

人們甚至可从各种不同的观点，把同一的圖形做出許多的透視。

我們很容易表示这些透視，因为它們只有三維的緣故。

試設想同一物的透視依次相繼下去；而其中每一經过皆有筋肉的感覚相伴。

不必說，人們对其中兩个經过，如果都是結合着同一的筋肉感覚的，則当認为同性的动作。

人們尽管可以想像这些动作是按照我們任意的定律互相組合，例如使其形成一群，而与四維不变的固体运动有同一的結構。

那里面是絲毫沒有不能表示的，但这些感覚恰恰是那具有二維網膜又能在四維空間移动的一种生物所感受的。

就是在这种意义上人們才能說人們能够表示第四維。

照这样去表示我們在上章講过的希尔伯脫的空間是不可能的，因为这个空間已不是二維的連續統了。所以它与我們尋常的空間区别太深刻了。

結論——人們可見經驗在几何学的萌芽上，有不可缺少的作用；但因此就說几何学是或有一部分是实驗的科学，那就錯了。

卽使它是实驗的，但这也不过是暫时的和近似的。而这近似的程度又是何等的粗陋！

几何学只是一种固体运动的研究；但其实它是不管天然固体的，它的对象乃是一种理想的固体，絕对不变的，这不过是一种簡化的，差得很远的影像。

这些理想物的概念完全是來自我們的精神作用，經驗不过使我們有把它从那里提出來的机会。

几何学的对象，是在研究特別的一“群”；但这“群”的概念，在我們精神中至少已强有力地預先存在。它支配着我們不作为我們感覚的形式，而是作为我們悟会(l'entendement)的形式。

但是，在一切可能的“群”中，应該选出那認为可說是标准的，以檢驗各自然現象。

經驗引導我們作这个选擇，但不支配着我們；它告訴我們并不是某某几何为最眞实，却是使我們知道某种为最便利。

人們当注意到我能够描寫我在上面理想的空幻世界，而用的

是尋常几何学的語詞。

其实我們卽使來到那里面，我們还是不会改換这語詞的。

在那里面受教育的生物，自然覺得以創造一种合乎它們的印象，而有异于我們的几何的几何較为便利。至于我們，对着同一的印象，我們一定覺得以不改变我們的習慣为最便利。

第五章 經驗与几何

一、在前文中，我已反复証明几何学原理并不是經驗的事实，且特别說明欧几里得公設决非实驗可以証明的。

我所根据的理由無論如何坚实，我相信还須加以申說，因为有一种謬念根深蒂固地存在許多人的腦海中。

二、設有一物質的圓圈，試量其周圍与直徑，又試算此二数的比例为π否，这却是做了什么呢？ 人們所做的并不是关于空間特性的实驗，而是有关那完成此圓的物質的特性的实驗，以及那做成用以測量的米达尺（公尺）的物質特性的实驗。

三、几何学与天文学——人們对于上面的問題，又曾經有另一种提法。倘若罗氏的几何是眞的，則一顆很远星的視差(parallaxe)將是有限的了；再如黎氏的几何是眞的，这数就將是負的了。这些結果好像是可供实驗的，而人們曾希望天文的观察可以在这三种几何中有所決擇。

但在天文中所謂直綫，簡直就是光綫的路程。所以卽使万一有人發現了負数的視差，或証明一切視差都大于某定限，人們对于下述的兩結論，当有所选擇：我們或者舍棄欧几里得几何，或者修改光学的定律；而承認光的傳达，嚴密講起來不是直綫。

大家对于后面这个解答必認为更有利，这是不消說的。

所以欧几里得几何对于新穎的实驗是一点也不怕的。

四、人們能否主張某种現象在欧几里得的空間是可能的，而在非欧几里得的空間就不可能，于是当实驗發覺这些現象时，就与非欧几里得的假設直接發生矛盾呢？ 我看起來，像这种問題是不能提出的。我以为提出这个問題不啻說：有無能用公尺与公分計量，而不能用尺与寸計量的長度，以致当实驗發覺这些長度存在时，就和那十寸为尺的假設，將直接發生矛盾。

我們且把这个問題再仔細一看。我假定在欧几里得的空間中有一直綫含有二种特性，我叫它为 A 与 B；而在非欧氏的空間中它含有 A 性，但無 B 性；最后我假定唯有直綫旣能在欧氏空間中又能在非欧氏空間中含有 A 性。

果然这样，那么实驗就可以在欧氏的假設与罗氏的假設中有所决擇了。人們就可以見到某某可实驗的而具体的物件（例如一道光綫）含有特性 A；由此可以結論光是直綫的，然后再看它有無特性 B。

但其实不然，因为沒有一种特性能如特性 A，可以作为一种絕对的标准來認識直綫，而和其他的綫有所区别。

譬如有人將問：“这个特性將是如此的：直綫之为物，卽凡含有此綫的圖形移动时，勢必变动此圖的各点相互的距离，且使此綫的各点仍旧固定？”

其实，这就是在欧几里得或非欧几里得的空間中直綫所有而唯它独有的一种特性。然而人們如何用实驗可以認識这种特性是屬于某某具体的物呢？ 因此勢必量其中的距离，但又何以見得用那物質仪器量得的具体数量就可代表那抽象的距离呢？

对于这个难点，人們僅僅把它打退了一步而已。

其实我剛才所說的特性，并非直綫独有的，这是直綫与距离二者的特性，如要將它作为絕对的标准，人們不特需要証明除了直綫与距离之外，它不屬于任何綫，还要証明除了直綫之外，它不屬于任何綫，又除了距离之外它不屬于任何数量。但这是不确实的。

所以要想借一种具体的实驗能在欧氏几何中解释一切，而不能在罗氏几何中解释一切这是不可能的，因此我結論：

任何实驗与欧几里得公設永不会有所矛盾；而任何实驗与罗氏公設也永不会有所矛盾。

五、但只管欧氏几何（或非欧氏几何）与实驗不致直接生起冲突，这还是不够的。会不会有这情况：它之所以能与实驗符合，除非他違犯充足理由律和空間相对原理才行？

請說明如下：設有一任何物質系統；一方面，我們要看那系統的各物体的“狀态”（例如其温度，其电位等等），另方面，要看它們在空間的位置；而在这些可以規定这地位的数据中，我們还要区别那規定它們相对位置的相互距离，以及那些規定系統的絕对位置与其在空間的絕对方向的条件如何。

在这系統中所發生的現象的定律，与这些物体的狀态及其相互的距离是有关系的；然由于空間相对性及其被动性的关系，这些定律和这系統的絕对的位置与方向是無关的。

换言之，在任何时刻，物的狀态及其相互距离，僅根据这些同样物体的狀态，及其初时的相互距离，而与此系統在初时絕对的位置及絕对的方向毫不相干。簡而言之，我可称它为**相对定律**。

一直到此，我所說的有如一位欧几里得几何家說的話。然我已申明，無論何种实驗，都有用欧氏的假設的解释，但同时也可有

用非欧氏的假設的解釋。好了,我們已做了一系列的实驗,我們已把它們用欧氏的假設來解釋,而我們已認識这样解釋的一些实驗是与“相对定律”不相矛盾的。

我們且用非欧氏的假設來解釋它,这总是可能的。不过我們的不同的物体的非欧几里得距离在这新解釋中与在原始的解釋中的欧几里得的距离一般是不同的。

用这新方式解釋的我們的实驗,还可与“相对定律”符合嗎?如其不然,人們沒有权利說实驗已証实非欧几里得几何的謬誤嗎?

这眞是杞人憂天了。其实人們如要把这相对定律嚴密地应用起來,那就非应用到宇宙全体不可。蓋人們如僅認定宇宙的一部分,又假使这部分的絕对位置一变,則其与宇宙間各物的距离也將变,它們对于这宇宙的局部影响因此將能有所增減,也因此能够改变其中所生現象的定律了。

然我們的系統如是宇宙全体,則实驗势必不能告訴我們它在空間有什么絕对的位置与方向。無論我們的仪器何等精巧,我們所能知道的,只是宇宙的各部分的情狀及其相互的距离。

由是我們的相对定律可这样說法:

在任何时我們在我們的仪器上所能測視的讀数僅依存于我們在初时在这同一仪器上所能測視的讀数。

但这种的說法不依存于任何实驗的解釋。如果某定律在欧氏的解釋中为眞,則在非欧氏的解釋中也眞了。

对于这个題目,請再讓我插說一下。我上面已經說过規定一系統中各物位置的数据;我本还当說明規定它們速度的数据;于是我將要区別那借以变动各物相互距离的速度;另方面,系統的位移的和旋轉的速度,此卽借以变动它的絕对的方向与位置的速度。

为使人家完全滿意起見，則相对定律还要这样說法才好：

在任何时刻，物的狀态与其相互距离，以及在这时借以变动这些距离的速度，僅靠初时这些物体的情态与其相互距离，以及那初时借以变动这些距离的速度，但这与系統初时的絕对的位置和方向旣無关系，又与初时变动这絕对的位置与方向的速度無关。

不幸这样陈述的定律不合乎实驗，至少是与我們普通解釋的实驗不符合。

設有一人迁居在一星球上，那里的天空常是云霾满布，以至永不能看見別的星球；这人一定以为生活在孤立的空間的星球上。然这人仍可覺得球在旋轉，或用量星球的扁平度的方法（这就是我們借助天文观察时通用的办法，但亦可用純粹大地測量的方法），或用傅哥尔（Foucault）擺的实驗。所以这星球的絕对轉动便可顯出了。

这里面有一件事实使哲学家触目，但物理学家則非承認不可。人們知道牛頓（Newton）从这事曾結論絕对空間的存在；我無論如何不能贊同这种見解，我將在第三部中說明何故。現在我尙無意來談这个困难。

所以在相对定律陈述中我必当免去在那些規定物体狀态的数据中混淆各种速度。

虽然，这个困难对于欧氏几何和对于罗氏几何都是一样的；所以我对它沒有什么不安，而我只是順便談及而已。

有关緊要的就是結論：实驗对于罗氏几何与欧氏几何不能有所定夺。

总之，無論如何反复申辯，对那几何的經驗主义不可能發現合理的意义。

六、实験不过告知我們物与物間的关系；至于物与空間的关系，或空間各部分的相互关系，都是实験达不到，也是不能达到的事呵。

讀者对此必回答道："不錯，唯一的实験是不够的，因为它只給我們一个含有許多未知数的方程式；但我如能做足够多的实験，則我將得足够多的方程式去計算一切未知数了。"

單單知道大桅杆的高度并不足以計算船長的年齡。就是把那船里各种木塊統計了，人們將得許多的方程式，但还是不能知道他的年齡。所有你的測量旣达到你的那些木塊，只是对这些木塊有所發現。同样，你的实験無論如何多，如只能达到物与物間之关系，則絲毫不能發現空間各部分的相互的关系。

七、你們又將說，如果实験达到物体，那么它至少达到物体的几何的特性？

那么先請問物体的几何的特性，究作何解？我假定这就是物体与空間的关系；所以这些特性是不可实験的，这些实験只达到物与物間的关系。这样已足見得这并不是关于实験的問題了。

然而我們先总要了解物的几何的特性的意义。当我說一物含有許多部分，我假定在这里我并不陈述一种几何的特性，而这还是对的，卽使我給我所考慮的最小部分一个不合适的名辞，叫做点。

又如我說某物体的某部与另一物体的某部相接触，我所陈述的是一个关于二物間相互的关系的命題，而并不是关于物与空間的关系。

我假定讀者承認我剛才所說的并非几何特性；我至少确信讀者同意我說这些特性与一切度量几何的知識毫無关系。

既然如此，今設有一固体是用共同联在 O 点的八根細鉄条

OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH 作成的。此外另有第二个固体，比方是一木塊，上塗三墨跡名曰 α, β, γ。其次我假定人們發覺人們能够使 $\alpha\beta\gamma$ 可与 AGO 相接触（意即 α 与 A, β 与 G, γ 与 O 都同时接触），因为人們可依次使 $\alpha\beta\gamma$ 与 BGO, CGO, DGO, EGO, FGO 接触，其次与 AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO, 又其次 $\alpha\gamma$ 可依次与 AB, BC, CD, DE, EF, FA 接触。

这就是人們可發覺到的事情，而事先并不必知道什么空間的度量的特性和形式。这些發覺是絲毫不达到"物体的几何特性"的。倘若这些受实驗的物体是按照与罗巴切夫斯基的群（意即根据与在罗氏几何中的固体相同定律）有同一結構的群而运动，則这些發覺將为不可能的了。所以它們足以証实这些物体是按照欧氏的群运动的，或至少不是按照罗氏的群而运动的了。

这些發覺与欧氏的群相容合，这是容易見得的。

因为我們能够作这些發覺，如果物体 $\alpha\beta\gamma$ 是我們普通几何中不变形的固体，而表現直角三角形，又如 $ABCDEFGH$ 諸点是一多面体的頂点，而这体乃我們普通几何的兩个正六面稜錐体凑合而成，兩者的公共底面是 $ABCDEF$，其頂点一为 G，一为 H。

現在假定不是上面的發覺，而注意有如剛才可依次把 $\alpha\beta\gamma$ 联合在 AGO, BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO 諸形上，其次人們可將 $\alpha\beta$（而不再是 $\alpha\gamma$ 了）依次联合在 AB, BC, CD, DE, EF, 和 FA 諸形上。

这將是人們所能做的發覺，如果非欧氏几何是眞的，如果 $\alpha\beta\gamma$ 与 $OABCDEFGH$ 是不变形的固体，如果第一体是直角三角形而第二体是大小适合的兩个双重的正六面稜錐体。

所以如果这些物体按照欧氏群而运动，則这些發覺將是不可

能的了;但如假定物体按照罗氏群而运动,它們便可能了。所以它們足以(如果人們去做)証明这些考慮的物体不是按照欧几里得群运动的。

这样,我对于空間的形狀,性質和諸物与空間的关系,不必做任何假設,又不必賦与物体以任何的几何特性,但我已做了許多的發覚,使我能够說明在一种情形中这些被实驗的物体按照欧几里得群而运动,在另一种情形中它們按照罗巴切夫斯基群而运动。

但我希望人們不要說那第一种發覚成为証明空間是欧几里得的实驗,而那第二种是証明空間不是欧几里得的实驗。

其实人們可想像(我只說想像)有些物体之运动有使第二种發覚成为可能。其証据就是一位初來的机械匠苟能吃苦賣力,就可把它造成。但你不要就此結論空間是非欧几里得的呵。

并且就是当那机械匠造成那些我方才說过的奇怪物体时,那些尋常的固体仍能存立,所以必須結論空間同时是欧几里得的与非欧几里得的了。

例如設有一半徑 R 極大的圓球,其溫度按照我討論非欧几里得世界时的定律,由球心漸漸降低到球面上。

我們可能有一种膨脹性可忽去的物体,而可認为尋常不变形的固体;另方面,有一种膨脹率極大的物体,而可認为非欧几里得的固体。我們可有兩个双重的稜錐体 $OABCDEFGH$ 与 $O'A'B'C'D'E'F'G'H'$ 又有兩三角形 $\alpha\beta\gamma$ 与 $\alpha'\beta'\gamma'$。第一双重稜錐体將是直的,而第二稜錐体是曲綫的;三角形 $\alpha\beta\gamma$ 將是用一种不可膨脹的物質制成,而 $\alpha'\beta'\gamma'$ 是用一种極易膨脹的物質制成。

用三角形 $\alpha\beta\gamma$ 与双重稜錐体 OAH 就可得第一种發覚,用三角形 $\alpha'\beta'\gamma'$ 与双重稜錐体 $O'A'H'$ 就可得第二种發覚。于是經驗

似乎起先証明欧几里得几何是眞实的，然后証明这是謬誤的了。

所以經驗只达到物体，并不达到空間。

补充語

八、为完全起見，我还当說到一个很微妙的問題，但是因为太長的緣故，只能把我在形而上学与道德雜誌及在一元雜誌中(Revue de Métaphysique et de Morale; The Monist)的著作概括于下。現在要問，我們所謂的三維空間究作何解？

我們已知道被我們筋肉的感覚所發覚的“內部变动”之重要。它們可以用为表征我們身体上各种的姿态。我們試任意認定姿态 A 为起点。当我們由姿态 A 到姿态 B 时，我們受到一些筋肉的感覚 S，而这些感覚 S 即确定 B。但我們总是要注意有时 S 与 S' 的兩种感覚可以确定同一姿态 B（因为起初姿态 A 与最后姿态 B 既相同，其中經过的姿态和相对应的感覚可以不同的）。所以究竟用何法我們認明 S 与 S' 有相等的价值呢？这是因为它們可用以补償同一的外界的变易，或一般地，在补償外界的变易之时，二感覚之一可以其他代替。

在这些感覚中，我們已区别那些独自能补償外界的变化，而名之曰“移动”。对于兩个太近的移动，我們旣不能有所辨别，故这些移动的集合含有物理連續統的特性；經驗告訴我們說，这就是六維的物理連續統的特性；然空間自己到底有多少維，我們却还不知，我們当去解决另一問題。

何为空間之一点？这是大家都自信知道的，其实这是幻想。我們所見的，当我們設法去表示空間的一点，这就是白紙上的黑点，黑板上的白点，这总是一件东西。所以这个問題要如下文去理解才行：

当我說 B 物現占的位置与剛才 A 物所占的为同一点，这是何意？或用何种标准，我可有此种認識？

我要說，虽然我未移动（这是我由筋肉感覚知道的），我的第一指方才触了 A 点，現在触着 B 点。我可用別的标准來說；譬如換一个指去指点，又或用眼光去察視。然第一标准已足够了；我知道如第一标准回答对的，则其余的亦必有同一的回答。这是由經驗我才能知道的，但这是我不能先驗的知道的。这也是为了这个緣故，我才說触覚不能远隔，这又是另一种方法說明同一的經驗事实。反之，如我說眼光可远离于物，这就是說眼光所供給的标准可回答对的，而別的标准則回答不对。

其实，一物虽远离了，然其影像仍可留在網膜的同一点。視覚回答对的物仍停留在同一点，而触覚回答不对，因为我剛才接触那物之手指，現在已碰不到它了。如果經驗告訴我們說一指拇回答对的，同时另一指拇回答不对的，我們仍是可以說触覚作用可以远隔。

总而言之，对于我的身上每一姿态，我的第一手指确定一点，而唯它能确定空間之一点。

由此每一姿态卽有一点相对应，但往往同一点可有許多不同的姿态相对应（就是在这种情形中我們才說我們的手指未动，所动者是其余的体部）。所以在这些姿态的变易中我們区別那手指未移动的一种变易。我們怎会來到这步？此因我們常常注意到在这些变易中那与手指接触的物体并未脫离这个接触。

所以我們可以把所有的姿态列入同一类，这些姿态可由我們前面所区別的变易中之一彼此互相引出。对同类的各种姿态，与空間的同一点相对应。所以每一类有一点相对应，而每一点有一

类相对应。但人們可以說，經驗所达到的并非点子，而是这一类的变易，或更好些，是相应的筋肉的感覚之类。

于是当我們說空間是三維的，卽是簡單地說：这些类的集合对我們有如三維物理的連續統的特性。

人們又可想这是实驗告訴我們說空間有几維的。但实际上，此地也是实驗不达到空間，而达到我們的身体及其与鄰近物之关系。并且这些实驗是很粗陋的。

在我們头腦中，早就存有一些群的潛伏观念，其理論已經黎氏研究过了。我們到底揀那一群作标准，以比較那些自然界的現象？这一群选了之后，我們还要揀那一小群，以表征空間之一点？經驗用指示我們那一种选擇最合我們的身体特性的方法指導我們。然而它的功用僅限于此。

祖傳的經驗

有人常說如个人的經驗未能創造几何，祖傳的經驗則为不然。但这是怎講呢？其意是否我們不能由經驗而証明欧几里得的公設但我們的祖宗竟能做过？这絲毫不是的。人們的意思，卽用自然选擇法，我們的精神能适合外界的情形，它采用了最有利于人种的几何；換句話說，那最便利的几何。这一点是与我們的結論完全相符合的，几何学不是眞实的，但是有益的。

第三部　力

第六章　經典力学

英國人將力当作实驗科学教授，在大陸的國家，人們就把它認为一种演繹的和先驗的科学來叙述。不必說，这是英國人有道理；不过在其他歧途中，人們怎会忍耐这样久？何以大陸的学者虽想脫离他們前輩的習慣，但总是不能完全逃出这个难关呢？

另方面，如果力学原理的來源不过是实驗，这是否只是暫时的和近似的呢？將來新的实驗不能使我們一旦修正这些原理，或竟拋棄它們么？

这些是自然会提出的疑問，而其解决之困难主因是在一般力学專書不能分明何为实驗，又何为数学的推理，何为公約，又何为假設。

这还不算数：

一、絕对的空間是沒有的，我們所理解的不过是相对的运动而已；但是人們陈述力学的事实时，总当空間是絕对的，而把它們归入其中。

二、絕对的时間是沒有的；所謂兩个歷时相等，只是一种本身毫無意义的断語，而要獲得一种意义也必須用公約。

三、不但我們沒有兩个相等的时間的直覚，并且我們对于兩地所發生的兩件事情同时并現（la simultanéité）的直覚也是沒有；

这事我在时間之測量(La mésure du temps)① 一文中已詳論过了。

四、最后，我們的欧几里得几何亦不过是一种公約的言語；我們可以把力学的事实归入非欧几里得的空間，这虽然是个比較不便利的标誌，但和我們平常的空間是同样地合法；陈述將比較繁得多；但它还是可能的。

这样絕对的空間，絕对的时間，甚至几何学，并非支配着力学的条件；这些东西之不先力学而存在正如法文不比那些用法文表現的眞理邏輯地先存在。

人們可把力学的基本定律用一种与这些公約毫不相干的言語說明；而人們將必更为明白这些定律的本身是什么；这就是安得那得(Andrade)先生在他的“物理的力学”中所做过的至少是部分的尝試。

这些定律的陈述自然將比較繁得多，因为正是为要縮短而簡化这种陈述，才想出來这些公約。

至于我呢，除了关于絕对的空間外，我把这些困难姑且放下；这决不是忽視它們；因为我們在前兩部中，已經充分討論过了。

所以我暫且承認那絕对的时間和欧氏几何学。

慣性的原理——凡物不受外力只能作直綫的匀速运动。

这是否先驗地支配着精神的眞理？ 果眞如是，为何希臘学者竟沒有知道？ 他們又怎能相信那發生运动的原因一停，則那运动也就停止呢？ 又怎知凡物如不受外界阻力則常繞圓旋轉，即所謂运动中之最高貴者？

① 玄学与道德雜誌，第6卷，1至13頁(1898年1月)；参考科学之价值，第二章。

人們如說物的速度是不可变的，假使它無变易的理由，則人們不是也可堅持說如物不受外界改变它的原因，則此物的位置不变，或其軌道的曲度不变？

所以慣性原理既非先驗的眞理，是不是經驗的事实呢？但人們曾否实驗过毫不受外力的物体，如曾做过，則人們又何从知道这些物曾否已受了外力呢？人們常用下面的例：一彈子滚于一張大理石的平面上好久不停止；但我們何以說它是毫不受外力呢？是否因为它远离了他物，所以說它是毫不受外力么？今若任意把它投向空中，它离地也不远；大家知道在这种情形之下它將受地心吸力的影响。

一般力学教授常是很快地講过这例；但他們加說慣性原理被其后果間接核驗。他們沒有好好地解釋，其实他們想說人們可以核驗一更普遍的原理的各种后果，而慣性原理不过其中之一特例而已。

对于这条更普遍的原理，我想这样陈述：

某物之加速度僅依存于此物之位置及其鄰近物之位置与速度。

照数学家的說法，就是宇宙間一切物質分子运动都依存于二階微分方程式。

为說明这实在是慣性原理之自然的推廣，我还要求讀者允許作一种虛構。我上面已說过，慣性原理幷不是先驗地支配我們的；別的定律，和它一样，也能与充足理由律相容。如有一不受外力之物，与其假定它的速度不变，人們可以假定这是它的位置或其加速度不当变易的。

好了，我們此刻暫把这兩个假想的定律之一認为自然定律，而

用以代替慣性定律。然則什么將是它的自然推廣？稍一思索便可知道。

在第一情形中，人們当假定物之速度僅依存于其位置与鄰近物体之位置；在第二情形中，假定物体加速度之变易，僅依存于物之位置，鄰近之物体，它們的速度及其加速度。

換数学的術語說：就是运动的微分方程式在第一情形中是第一階的，在第二情形中是第三階的。

現在把我們的虛構修改一下。我假定有一与我們太陽系相似的世界，不过因一种奇怪的意外，其中众星的軌道沒有离心率和傾角。我又假定星群的物質太小，以致它們相互干擾的影响極弱。那么在这种星球上的天文家必結論說，一星球的軌道必是圓形，并与某平面相平行；某星球在某时間的位置已足規定它的速度与整个軌道了。他們所采用的慣性定律必是我剛才說过的第一假設定律。

今試想这个系統有一天忽被來自远方星座的一大質量的物体極速地穿过。于是所有軌道必大为擾乱。我們的天文家还不致十分驚訝；他們必猜想这顆新星乃是唯一的禍首。但他們还会說，当这大星远离之后，秩序自然又可恢复；毫無疑問，星球与日球的距离虽不能变成像灾变以前的原狀，但一待搗乱的星去了之后，則各軌道又將变为圓形。

这一直要等那搗乱的东西远离之后，而那些軌道不恢复圓形，却变成橢圓的，只是到了这时候，这些天文家才發覺他們的錯誤，并有重新改造他們的力学之必要。

我已把这些假設着重地說了一番；因为好像要人們好好地弄懂何为廣义的慣性定律，只有把它与一个相反的假設相对立才行。

現在却好了，这个廣义的慣性定律已由实驗核驗否，并能否这样？当牛頓著原理論一書时，他以为这是已成立的眞理，并且已由实驗核驗了。他的这种見解不特是惑于拟人体論的偶像(l'idole anthropomorphique)——我們以后再說罢——并且受伽利略(Galilée)工作的影响。他还受了凱普勒(Képler)定律的本身影响；盖根据这种定律，凡一星球之軌道可由其初时之位置与速度完全确定，而这正是我們廣义的慣性原理所要求的。

如要这种原理只是貌似的眞实，如果怕將來这个原理被与我剛才和它相对立的原理相似的原理所代替，那么除非我們被某种奇怪的偶然所遺誤；有如我在上面所說的虛構中，曾使我們理想的天文家走入迷途的那偶然一样。

这样的假設是太不合理了，不值得在这里停留。誰也不信会有这种偶然的事；在观察誤差的范圍內，那兩离心率恰恰都是零的概率(la probabilité)并不較小于在誤差范圍內一个恰恰是〇·一，一个是〇·二的概率，这是無疑的。一件簡單的事情之概率不必小于一件复雜的事情之概率；然假使前者發生了，我們不能相信自然界有心騙我們。这种的誤会的假設旣然撇开了，我們就可以認为在天文学一方面，我們的定律确已被核驗了。

然天文学不是物理学全体。

人們豈不想到一旦有些新的实驗來，会使定律在物理学中某部分不通行嗎？凡一实驗的定律都待修改的；人們总当希望某定律將來可代以更精确的定律。

然而竟無人眞正疑心我們所說的定律永不会被抛棄或遭改正。何故？这正是因为人們永不能把它作一决定性的实驗。

如要这个考驗是完全的，第一要宇宙万物經了某定时間仍旧

归还原地，而恢复原始的速度。在那时候，人們就可見得它們是否仍依循前次的軌路了。

但这种考驗是不可能的，人們最多只能做到一部分，而且無論怎样做得好，总有些物体是不能还原的；所以各种对于定律的抵触，由此都可解釋了。

这还不算数；在天文学中我們看見我們所研究运动的星球，且我們承認它們不受其他不可見的物体之影响。在这种情形之下，我們的定律，要么可以核驗要么就不可核驗。

但在物理学中則不然，若說一切物理的現象都是由于运动，那就是其中我們看不見的分子运动。故如我們所見的某物之加速度，除与其他可見物的位置与速度和先前已知其存在而不可見的分子的位置与速度有关，此外还与他物有关：則我們何尝不可假定这他物即其他分子的位置或速度，而这些分子是我們以前还未發覚它存在的。于是那条定律仍可保存。

且讓我用数学的術語把上面的意思换一个形式來說明。我假定我們观察 n 分子，且其 $3n$ 坐标可以滿足 $3n$ 四階微分方程式(而非如慣性原理所要求为二階的)。我們知道如加入 $3n$ 个輔助变数則 $3n$ 四階方程式可化为 $6n$ 二階方程式。由是如假定这 $3n$ 輔助变数用以表示 n 个不可見分子的坐标，則結果又符合慣性定律了。

总之，这个定律既在一些特別情形中可以用实驗核驗，卽不怕可推廣到最普遍的情形中，因为我們知道在这些普遍的情形中，实驗既不能把它肯定也不能反駁。

加速度定律——物体的加速度等于它的質量除所加力之商数。

这个定律可用实驗核驗嗎？为此必將这定义中的三量：加速

度、力和質量加以測定。

我承認人們可以測定加速度，因为我暂把关于測量时間的困难按下不提。但力与質量当如何測量呢？我們簡直不知道这是什么？

何謂質量？牛頓說这是体積乘密度——湯姆生(Thomson)和代脫(Tait)都認为这不如說密度乃体積除質量之商。何为力？拉格朗日(Lagrange)說这是產生物之运动或引其再生运动之原因——紀哥夫(Kirchhoff)則說这是質量乘加速度之積。然則何以不說質量即加速度除力之商？

这些眞是解决不了的困难。

当人們說力乃运动之起因，这不啻談形而上学，而人們如把这种定义認为滿足，它一定毫無效果。要想一定义有点功用，它必能指示我們如何測量力；僅此已足，我們毫不希望它告訴我們力的本質是什么？更不必問它是运动之因或果。

所以第一要规定二力的相等性。如何二力才相等？人們將說，凡相等的二力施于同一的質量上可發生同一的加速度，又或二者直接相反的时候，它們成平衡。这种定义不过騙騙眼目而已。我們决不能把加于一物的力調到另一物上，有如把火車头調換在别的一輛車子上似的。所以不可能知道施于某物之力如果施在另一物时，其加速度將如何。我們又不可能知道如果曾經是直接相反的二力在不直接相反时，它們將如何。

当人們用动力計測量力之大小或用一重量使它平衡时，这可說就是要把上述定义具体化。为簡化起見，設有自下向上二直向力 F 与 F' 并分别地加在 C 与 C' 兩物体上；我又把一个重物 P 先挂在 C 物上，后挂在 C' 物上；如在这兩例中都得平衡，則我結論 F

与 F' 的力相等，因为它倆都是等于 P 物之重量。

但我能否保証，当我將 P 物由物体 C 移到物体 C' 时重量未变？这可大不然，我确信这是相反的；我知道重量之强弱，随地而易，譬如在兩極的当比在赤道的为强。無疑的，这种差別是很微的，而在实用中我是不算它的，但一条很完美的定义却要有一种数理的精密性才行；这种精密是不存在的。我所說的有关重量的話，自可应用到动力計上發条的力，因为温度以及許多的情况均能使其变动。

这还不算数：人們不能說 P 物的重量是施于 C 物上而直接与 F 力平衡。所施于 C 物者，乃 P 物加于 C 物之作用 A；P 物一方則受有自己之重量，一方則受有 C 物加于 P 物之反作用 R。結果 F 力等 A 力，因此力使其平衡之故；A 力等于 R 力，这是根据作用与反作用相等之原理；最后，R 力等于重量 P，因此力使其平衡之故。这是从这三个等式，我們方才結論 F 等于 P 的重量。

所以在兩力相等之定义中，我們势必引用作用等于反作用之原理；因此这个原理再不可認为实驗定律，而当認为一种定义。

所以我們具有兩个法則以認識兩力之相等：互相平衡之兩力相等；作用与反作用之相等。然我們上面已見过这兩种法則是不够的；我們势必采用第三法則，且承認某种力，例如物之重量，其方向与量均为常数。但是我已說过，这第三規則乃是实驗的定律，它只是近似地眞实；这是不好的定义。

所以我們被引到紀哥夫的定义；力等于加速度乘質量之積这条“牛頓定律”也不能看作实驗的定律，它不过是一定义而已。但这定义还是不够的，因为我們不知道質量是什么。自然我們可借它來計算在不同的时候加于同一物体的兩力的比率；至于加在兩

不同物的兩力的比率，則它絲毫不能告訴我們什么了。

为要补充这个定义，我們又須引用牛頓第三定律(作用与反作用之相等)，这还是不当認为实驗的定律，而当認为一种定义。今有互相抵触之二物 A 与 B；A 之加速度乘其質量等于 B 施于 A 之作用；同样，B 之加速度乘其質量等于 A 施于 B 之反作用。若照定义，作用旣等于反作用，則 A 与 B 的質量之比率当等于二者加速度之反比。兩質量之比率就是这样定明；而要实驗去核驗这个比率是常数。

如果除了 A、B 兩物之外，幷無世界上它种物力参加，則此定义甚善。其实不然，A 之加速度不但由于 B，且由于許多別的 C、D 等物。所以如要应用先前法則，必須將 A 之加速度分解成若干分量，而在这些分量中認明那一分量是由于 B 的作用的。

如果我們承認 C 施于 A 之力，是簡單地加在 B 施于 A 之力上，虽有 C 之参加，仍不变 B 施于 A 之力，或虽有 B 之参加，不改 C 施于 A 之力；結果如果我們承認兩物相吸引，其吸引力之方向是在連接兩物之直綫上，且此力只倚賴兩物之距离如何；一句話，如果我們承認向心力之假設，則这种的分解还是可能之事。

人們知道，如要定天空中星球之質量，人們所用的原理大为不同。万有引力律說，兩体之吸引力与其質量成比例；今如 r 为它倆的距离，m 与 m' 是它倆的質量，K 代表常数，則此吸引力为：

$$\frac{Kmm'}{r^2}$$

但这里人們所測量的幷作为力与加速度之比的質量，而是有吸力的質量；幷非物之慣性，而是它吸引之能力。

这是一个間接的方法，理論上不一定是需要的。也許吸引力与距离平方成反比例，而不与質量的乘積成比例，卽它等于：

$$\frac{f}{r^2}$$

而非：

$$f=kmm'$$

倘若是这样的，人們用天体的相对运动之观察，仍然可以测定这些物体的質量。

然我們有無承認向心力假設之权？这个假設是否嚴密地准确？它的确永不会与实驗相矛盾嗎？誰敢断定呢？且如我們应舍棄这个假設，則此慘淡营造而成的大厦將卽傾复了。

我們再無权可說 A 之加速度之分量是由于 B 力的作用。我們毫無方法把它和由于 C 的力或其他物之力的加速度分别。那測定質量之法則，現在却不能应用了。

然則作用与反作用相等原理中尙有何物存在？今如舍去向心力的假設，則那原理必当如是陈述：凡一脫离任何外力的系統中的物体所受一切力之几何总和为零。換言之，此系統之重心运动將为直綫的而勻速的。

这样才似乎是对質量下定义之一法；重心之位置自然是依存于質量的价值；故必安排这些价值，使这重心做直綫而勻速的运动；如牛頓第三定律是眞的，則那总是可能之事，而这可能性一般唯有一种方式。

然世界上沒有脫离一切外力之系統，宇宙間各部分多少总受其他一切部分之力。故重心运动之定律，唯应用于宇宙全体才算嚴密的眞实。

但是如要从中知道各質量之值，必先观察宇宙重心之运动。这个后果之荒謬是很明顯的。我們僅知相对的运动，宇宙重心之运动是我們永世不能發覺的呵。

所以我們一無所有了，而我們的力量是白費了；不得已我們自認不中用，只好退讓到下面的定义：質量是一种系数，便于演算而已。

我們如把不同的价値分配到各質量，我們便可重新建立力学。这个新的力学既不会与实驗矛盾，又不会与动力学的普遍原理（惯性原理，力对質量和加速度成比例，作用与反作用之相等，重心的直綫而匀速的运动，面積原理）相矛盾。

不过这些新力学的方程式，將比較的不簡單。我們听好：比較不簡單的是第一部分的数項，也就是实驗已告知我們的数項；人們或者可把質量稍微改变，而不致使全部的方程式的簡單性有所增減。

赫慈（Hertz）尝問力学的原理是否嚴密眞实的。他說："照許多物理家的見解，最遙远的实驗可使那不可动搖的力学原理有所改变，这眞是不可思議的；然而由实驗中得來的东西，总是可由实驗矯正的。"

照我們剛才所說的，这未免有点杞人憂天了。动力学的原理，我們起初看上去，貌似是实驗的眞理；但我們已經不得已把它們当作定义了。这是照定义力才得等于質量与加速度之乘積；这就是一种以后永不受任何实驗攻击的原理。这也是按定义作用才等于反作用。

但是人們要說哪，这些不可核驗的原理是絲毫沒有意义的，实驗不能反駁它們，但它們不能告訴我們以有用的东西；那么研究动力学有何好处呢？

这样太快的判罪未免太不公正了。在自然界中沒有一种系統是完全孤立的，完全脫离外界一切影响的，但是有一种系統大約是

孤立的。

人們如观察这样的系統，人們不但可以研究其中各部分間的相对运动，且可研究它的重心对于宇宙間其他部分的相对运动。人們就可發覚这个重心运动大約是直綫而匀速的，正与牛頓第三定律相合。

这里是一个实驗上的眞理，但决不会被实驗推翻的；其实一个比較更准确的实驗会告訴我們什么？它会告訴我們說定律不过大約是眞的；但这是我們早已知道的了。

現在人們可以了解实驗何以可做力学原理之基礎，然而永不会和它發生矛盾。

拟人力学(la mécanique anthropomorphique)——人們要說哪，紀哥夫只是随同一般数学家而傾向于唯名主义，他虽是能干的物理学家也免不了这一点。他想有一种力之定义，因此他就采取了首先遇到的命題；但是一个力之定义，我們却不需要：力之观念是原始的、不可分析的、不可下定义的概念；我們都知道它是什么，我們对它有一种直接的直覚。这种直覚來自費力的概念，而这是我們自幼就已熟悉的了。

但是，首先即使这直接的直覚可以使我們知道那力的本身的眞正性質，但它还不足以建立力学；况且它也是完全無益的。緊要的，不是要知道力之为何物，是要知道怎样測量力。

凡是不能教我們去測量它的，对于机械技工也是無用的，这正如研究热学的物理学家对于冷或热的主观概念是一样的無用。这种主观的概念不能用数目表出，所以是無用的；假如一位大学者的皮膚是絕对不良的热導体，因而对于冷热是麻木不仁的，但他也能与别人一样覌察温度計，而这样对他已足够建設整个热学的理論

了。

但这种費力的直接的概念不能用以測力；例如平常人举起 50 公斤的重量时顯然要比提惯包裹的人吃力。

还有一層：这种費力之概念不能使我們領会力之眞正性質；最后它不过留了些筋肉的感覚，而人們决不会相信太陽吸引地球时，它受有筋肉的感覚。

一切人們在那里所能探尋的，只是一种符号（symbole），比那几何家所用的矢还要不正确和不便利，然都是离开实际太远咧。

这种拟人主义（l'anthropomorphisme）在力学萌芽时代曾起了很大的作用；有时它也許会供給一种符号，为少数学者所滿意；然而它是一点也不能建立什么含有眞正的科学特性或哲学特性的东西的。

"綫之学派"（l'Ecole du Fil）——安屈得（Andrade）先生在他著的"物理的力学教程"中曾把拟人力学返老还童。他用他所奇怪地称为綫之学派以对抗連紀哥夫也在內的力学家一派。

这派想"把一切都归結于一些質量可忽去的物質系統中來考慮，而这些系統是被認为在緊張情形之下，且能把極大的力量傳达于远处的物体，这种系統的理想的型式就是綫"。

一条傳达任何力的綫，受了这种力量，立卽輕微地伸長；由綫之方向我們可以看出力之方向，这力的数量則由綫之伸長而度量。

于是人們可以想像下面的一个实驗了。有一物 A 系于一綫；在另一端我們加上任何一种力，我們变动这力一直到使此綫伸長为 α 为止，同时我們登記 A 之加速度；拿去 A，换以 B 放在同一綫上，再重新加力，或其他一种力，我們又使它变动一直到使此綫伸長为 α 为止；同时登記 B 之加速度。人們用 A 与 B 重复試驗，但

須使綫伸長为 β。这四个观察所得的加速度当成为比例。于是上面所說明的加速定律就有实驗上的核驗了。

或者人們还可使一物受同样的而緊張的許多綫的同时作用，再由实驗去尋找这些綫的方向使这物平衡。这样人們就可由实驗証明力之組合法則了。

不过到底我們所做的是甚么？我們由綫受力后之变形而定明此力，这还算合理；其后我們承認如有一物系于一綫，則此綫所傳給它的力量等于物体施于此綫的作用；結果我們还是用了作用与反作用相等的原理，但幷不把此原理認为实驗的眞理，而是認为就是力之定义本身。

这个定义和紀哥夫所定的同样是公約性的，但它比較很不普遍。

所有的力不見得都被綫傳达（幷且如要作此比較，則这些力須是被許多同样的綫傳达才行）。假使人們承認有一条不可見的綫把地球系在太陽上，則至少人們应同意是無法可以測量这綫之伸長的。

由是以观，我們的定义，十有九是不对的；人們决不能給它任何意义，所以还是要回到紀哥夫的定义才行。

那末何必費了这个周折呢？你們承認了力之某种定义，而它在某种情形之下才有意义。在这情形中你們用实驗核驗它引出加速定律。根据这实驗，然后你們再將加速定律作为在任何情形下的力之定义。

今如將加速定律認为在一切情形中之定义，又把这些所說的实驗認为幷非此定律之核驗，而是反作用原理之核驗，或做为彈性物体之变形只靠加于此物之力的証明，这样不是比較更簡單些嗎？

至于你們的定义能被接受之条件永不会完全滿足的，一条綫永不会沒有質量的，此綫除受系結物的反作用之外不受其他力，这些都沒有算在內。

安屈得先生的观念頗饒兴趣；它虽对于我們邏輯上的要求不能与以滿意，然能使我們对于力学基本概念的發生史更加了解。它們所引起我們的迴思能使我們看明人类的思想如何从朴素的拟人主义進到現代科学之概念。

我們在起点看到一种很奇特的，实卽很粗陋的实驗；到終点时，則看到一种很精确的、很普遍的定律，而我們把这确实性認为絕对。这种确实性，可說原是我們認那种定律为一种公約我們才自由地給与它的。

然則加速定律与力之組合法則，都不过是任意的公約了嗎？这是公約，不錯；任意的，就不是了；人們如能細看那些引導科学創造家采用公約之实驗，則这些实驗無論如何不完美，已足証明这些公約之合理而非任意的了。因此最好人們常常注意到这些公約的实驗的根源上去。

第七章 相对运动与絕对运动

相对运动原理——人們曾經想把加速定律連結到一个更普遍的原理上去。任何系統的运动当遵守同样的定律，不問人們把它納于固定的坐标軸或納于作直綫而匀速运动的坐标軸。这就是相对运动原理，它根据兩种理由支配着我們：第一，有最淺近的試驗証实它，其次相反的假設是会被人們理智所唾棄的。

那么我們承認了它罢，并設有一力加在一物体上；又設有一位

观察者，其均匀速度正等于物体的初速度，則此物对于观察者的相对运动必与它从靜止出發的絕对运动相同。人們由此結論物体的加速度不应依賴它的絕对速度，人們甚至还想从此引出一个加速度定律的証明。

这个証明已隱約地散見在大学理科入学考試課程之中了，顯然这个尝試是白費辛苦的。阻擋着我們不能証明加速度定律的障碍，实因我們未曾獲得力之定义；这个阻碍仍旧存在，因为我們所提的原理未能供給我們所缺乏的定义。

但相对运动原理仍然是有趣味，而对它本身是值得研究的。我們首先設法把它精密地陈述罢。

在上文我們說过一孤立的系統中各物之加速度只依其相对速度及其相对位置，而不依其絕对的速度与位置，只要作为相对运动所根据的活动坐标軸的运动是直綫而匀速的运动。又如人們願意这样說，它們的加速度僅依其速度之差数及坐标之差数，而非这些速度与坐标的絕对值。

倘若这个原理适合相对的加速度，好点說，适合加速度的差数，那末把他和反作用原理組合起來，人們便可引証它对于絕对的加速度还是眞实的。

所以剩下來我們要看的，就是如何証明加速度之差数僅依速度的及坐标的差数，或用数学的話說，就是这些坐标的相差数可以滿足二階微分方程式。

这个証明可否由实驗中演繹出來，或由先驗的思想推出來？

讀者試回想我們在上文所說过的，便可自做解答了。

这样陈述的相对运动原理与上面我所說的廣义的慣性原理实相彷彿；但也不尽然，因为一是坐标，一是它們的相差数。所以这

个新的原理所告訴我們的东西多于旧的，但其中討論和結論都是一样的；可不必贅述了。

牛頓的論据——此地我們遇見一个很重要的甚至值得爭辯的問題。我已說过相对运动原理对于我們不但是实驗的結果，并且先驗地任何相反的假設都会遭人們理智所唾棄的。

然則何以只是运动坐标軸作直綫而匀速运动时，那个原理才是眞实的呢？如这运动是会变的，或至少变成匀速的旋轉运动，則这个原理对于我們似乎仍当有同样的支配力。但是在这兩种情形中这个原理是不眞实的。

对于軸的直綫而非匀速的运动的情形我且不多說；仔細一看，一切謬論都可打消了。今如我站在車輛中，而車碰到障碍物驟然停止的时候，虽然毫無一力直接加在我身上，我也一定要倒在相反的方向。这沒有什么神秘，因我虽沒有受到外力，但那輛車則已受到外力的冲动了。兩个物体之一的运动受了外因的改变，兩物的相对运动会立卽改变，这并不是什么荒謬的事。

我現在要仔細討論屬于作匀速旋轉运动的坐标軸的物体之相对运动。今如天空不断地密布云霾，如我們又無法观察那些星球，但我們仍可結論地球在旋轉；其法在測視地球之扁平率，或用弗哥耳(Foucault)的擺动实驗。

不过在这情形中，說地球是旋轉的，可有意义嗎？如無絕对的空間存在，那么人們可否不繞着什么东西而旋轉，而另方面我們怎能承認牛頓的結論而相信空間是絕对的？

但是我們僅知这些可能的解答都使我們討厭还是不够的；我們还要一个个地解析我們唾棄它的理由，使我們深知緣因而作我們的选擇。所以望讀者恕我下文冗長的討論罢。

試仍回到我們剛才的幻想：層層的云霾密布在天上以致人們不能窺見星球，且亦不知其存在；那末这些人怎能知道地球是旋轉的呢？他們一定比我們的祖先更要堅持說地球是固定的和不能搖动的；他們还要等更多年代才得有哥白尼(Copernicus)產生，虽然这位哥白尼終久必到的；然則他怎样來到呢？

这世界上的力学家不会走來便碰着什么絕对的矛盾。在相对运动的理論中，人們除了实在的力之外，还想出兩种假想的力，是卽所謂普通离心力与組合离心力。所以我們理想的学者可以把这兩力看作实在的來解釋一切，而他們在那里不会看到与廣义慣性原理有何矛盾，因为这些力中一种有如眞正的吸引力，依存于系統各部分的相对位置，一种有如眞正的摩擦力，依存于它們的相对速度。

但是不久又有許多的困难会喚起他們的注意；他們如能实現一个孤立的系統，則其重心运动將沒有一条大約是直綫的軌道了。为說明这个事实，他們可以利用离心力，而把它認为实在的，且無疑的，他們認为这是由于物体之相互作用。不过他們將不能看到在距离極大的时候，卽当孤立性愈近实現的时候，这些力会消滅；相反地，离心力随距离之增長而增到無窮大。

这个困难对于他們似乎够大的了，但他們所受的阻碍幷不長久；他們会很快地就想出一个有如我們以太(ether)的很微妙的媒質，而一切物体都浸潤其中，且受其排斥作用。

然这还不算数。空間是对称的，但运动定律幷不表現对称，它們对于左右是应該有所区別的。例如人們会看到颶風总是向一个方向旋轉，然而天空中的星石，因为对称的緣故，無区別地往左轉或往右轉。如果我們的学者能竭力造成他們的一个完全对称的宇宙，这个对称性是不能持久的，虽然表面上沒有理由可以使这个对

称性向某一方面擾乱而非向另一方面。

無疑地他們是会从这里解脫的，他們会發明出來一些不比多列麥(Ptolémée)的玻璃球还奇怪的东西，而人們这样前進，行見其愈弄愈繁，直待那位哥白尼來到，一扫而光，說道：还是承認地球是旋轉的比較簡單些。

我們的哥白尼曾經对我們說过，假定地球旋轉是較为便利的，因为人們可用比較很簡明的言語說明許多天文学定理；同样那位哥白尼則說：假定地球旋轉是較为便利的，因为人們可以用比較很簡明的言語表达力学的定律。

然而絕对的空間，意卽我們借以观察地球是否旋轉的标准，幷不因此而毫無客观的存在性。因此"地球旋轉"这个断語，是毫無意义的，因無一实驗可以核驗这个事实；因为像这种的实驗，不單不能实行和不能被思想之奇异有如魏勒(Jules Verne)的所能夢想，幷且卽想到时，亦难免有矛盾；或用这兩个命題："地球旋轉"与"假設地球旋轉較便利"都具有同一的和唯一的意义；而在兩者之中再沒有别的了。

或者人們还不以此为滿意，且已覺得在所有的假設中或在我們关于此題所能做的所有公約中，何以其中竟只有一条是較其他为便利，这个道理似乎使人不舒服。

但如遇到是屬于天文学的定律时，人們就很容易容納它，那么屬于力学时，人們就何故覺得討厭呢？

我們已知物体的坐标是由二階微分方程式确定的，而这些坐标之差数，亦是这样确定的。这就是我們所謂廣义的慣性原理与相对运动原理。如这些物体的距离也同样是用二階方程式确定的，則人們似乎应当完全滿意了。試問在何种分寸之下人們才得滿意，

为什么他不肯迁就呢?

我們要明白这層，不如举一个簡例。我假定有一个与太陽系相似的系統，但从这系統中，人們不能看見系統外之任何恒星，因此天文家僅能观察太陽与其行星之相对距离。而非行星的絕对經度。我們如直接从牛頓定律中，推出那規定距离变动的微分方程式，这些方程式將非二階式了。我的意思就是說，除了牛頓定律之外，假使人們已知这些距离在初时的値，及其对于时間的導数，这还不足决定这些距离在以后任何时間之値。还缺一个数据，而这也許就是天文家所謂面積常数。

然此地人們可以从兩个不同的观点來区别兩种常数。从物理家的观点，世界不过是一連串現象，这些現象，一方面只依存初时的現象，一方面只依存那些联絡后果与來因的定律。于是如果观察告知我們某数量为常数时，我們在兩种观察的方式中就有一个选擇了。

或者我們承認有一种定律，按这个定律，那数量是不能变的；然在世紀之初，它恰恰的不是別数而的确是这数，而且这数一直保存至今，那完全是偶然的事。所以这个数量可以叫做偶然常数。

或者我們反而承認有一自然的定律，它对那个量支配了此数而非彼数。所以我們又有个所謂本然常数(constante essentielle)。

例如照牛頓定律，地球公轉的週期，应当是个常数。然这数却等于 360 天有余而非 300 或 400 天，这个緣故，我可說是一种莫名其妙的初时偶然。这是一种偶然常数。反之假使在吸力表达式中的距离指数是等于 -2 而不等于 -3，这并非因偶然，却是因为牛頓定律要如此的。这是本然常数。

我不知道这样說明偶然含义对其本身是否合法，也不知道这

种区别是否有点人为色彩;但至少可以确信的是,当自然界倘含有秘密时,那末它在应用中將是很任意的,并且总是不穩定的。

至于面積常数,通常我們总認为偶然常数。不知我們理想的天文家也同我們一样設想否?他們如能比較兩种不同的太陽系,他們或將可覚得这个常数可有許多不同的值,然起初时,我恰恰就已假定他們的系統是孤立的,并且他們不能观察系外的任何恒星。在这情形之下,他們僅能有唯一的常数,有唯一的值,而絕对不变的;它們一定还会把它認为本然常数。

为免去一个反駁起見,我順便还說几句:在这个幻想世界的居民,既不能像我們观測又不能規定那面積常数,因为他們不能捉摸那些絕对經度;但这并不会妨碍他們很快地注意到某一种常数,这常数自然地引導在它們的方程式中,而这不是別的,就是我們所謂面積常数。

然这样又出事了,且听我說來。如果面積常数是認为本然的,因为它依存于一自然的定律,那末如要計算那些行星在某时的距离,只要知道在初时这距离之值,及其一次導数之值。在这新的观点上,那些距离將由二階微分方程式規定。

但这些天文家的意思認为完全滿意否?我不相信。第一当他們計算逐漸高階的微分方程时不久就看到这些方程式大为化簡。最使他們注目的,就是來于对称性的困难。于是又要承認許多不同的定律,这要随这些行星的集团是某种多面体形或是对称的多面体形而定,人們如要免去这个后果就非得承認面積常数是偶然的不可。

我所举的例是很特別的,因为我所假設的天文家完全不管地球上的力学,而他們的眼界只限于太陽一系。然我們的結論却能

适合于任何情形。我們的宇宙是比他們的廣大，因为我們还有恒星，但它也是有限的，于是我們对于我們的宇宙全体，可做一种推理，正如这些天文家对于他們的太陽系做一种推理一样。

由此人們可見，結果我們不得不結論那規定距离的方程式的階数是高于二的。那末我們何以感覚得詫异，为什么我們覚得各現象之次序依賴这些距离在初时的一次導数值为自然，而我們对于它們依賴二次導数之初时值就疑惑呢？这不能不是因为我們常常研究廣义的慣性原理及其后果所养成我們的一种習慣了。

在某定时的距离之值依賴它們的初时之值，它們的第一次微導数，以及其它。这其它是什么？

人們如不願意这个簡單就是二次導数中之一，人們只可选定一种假設。有如通例，假設这其它便是宇宙在空間的絕对方向，或此方向变动之速度，这也許是的，这一定是几何学家認为最便利的解答；但对于哲学家，就不見十分滿足了，因这方向是不存在的。

人們可以假定这其它是些不可見的物体之位置或速度；这确是有些人做过的，并且叫它阿尔法体（le corps alpha），虽然我們对这物体还只知道它的名称。这个巧法正与前章末了我說到慣性原理时的巧法完全相似。

总之困难是人为的。只要我們仪器的將來的指示僅依以前已經給与我們的或从前本可給与的指示，那就一切都够了。但在这种情形之下，那我們尽管放心好了。

第八章　能与热力学

能的系統——經典力学所引起的許多难点曾引起某些学者偏

叉另一种新的系統名曰能的系統。

能的系統產生于能之守恒原理發現之后。亥尔莫慈(Helmholtz)給了它一个最后的形式。

人們开始去規定对此原理起基本作用的兩种数量。这兩种数量:一种是动能或活力(l'enérgie cinétique ou force vive),一种是势能(l'énergie potentielle)。

自然界中各种物体所能受到的一切变态总是由下面兩种实驗的定律統轄的:

一、动能和势能之和是一常数。这就是能之守恒原理。

二、如某物体之系統在 t_0 时之情形为 A,在 t_1 时之情形为 B,則它由第一情形至第二情形时总必选走一条路,这路使在分开 t_0 与 t_1 兩时期之間隔时期中兩种能量的相差数的平均值为最小。

这就是哈密尔敦(Hamilton)原理,这是最小作用原理(le principe de moindre action)之一种形式。

能的理論比較經典的理論有下列优点:

一、这个理論比較完全,就是說能之守恒原理与哈密尔敦原理所能告訴我們的比經典的理論之基本原理为多,并且它們排除了某些自然界所不能实現的运动,但这些运动是与經典的理論相容合的。

二、这个理論省却我們的原子的假設,而在經典的理論中,这假設几乎是不可避免的。

但这个理論也引起許多新的困难:

那二种能的定义之不易規定同在第一系統中力与質量的定义之不易規定相差極少。然而人們对此究竟較易解决,这至少是在最簡單的情形中如此。

設有一孤立的系統是多数物質点所組成的，我們假定这些点子受制于一些力，只依存于它們相对的位置与相互的距离，而非它們的速度。按照能之守恒原理，应該有一个力函数(une fonction des forces)。

在这个簡單的情形中，力之守恒原理的陈述是簡單極了。可由实驗测定的某数量該是常定的。这个数量是兩数項之和，其一僅依存于物質点之位置，而与其速度無关；其二是与其速度平方成比例。做这种分解只能有一种方式。

这兩数項之第一項我叫它 U，卽势能；第二数項我叫它 T，是卽动能。

今如 $T+U$ 为常数，則無論什么 $T+U$ 的函数，卽

$$\varphi(T+U)$$

自然也必如此。但这个函数 $\varphi(T+U)$ 將不是这兩数項之和：卽一項是不依賴速度的，一項是与速度平方成比例的。在固定不变的函数中唯有一种函数具此性質，卽 $T+U$（或 $T+U$ 之綫性函数，这是不要緊的，因为用單位与原点之变換法，这个綫性函数总可变成 $T+U$ 的）。于是这就是我們所称的能；其第一項我們叫做势能，第二項則为动能。所以这二种能量的定义可以毫不混淆地一直推究下去。

物之質量的定义也是如此。动能可很簡單地用一切物質点对于其中某点之相对速度及其質量來表明。这些相对速度是可以观察的，而一待我們有了以这些相对速度为变数的动能之表达式，則由这表达式的各系数可求出質量。

所以在这簡單的情形中，我們不难对一些基本概念下定义。然在較繁的情形中，則困难重生，例如力有时不單依存于距离，且与

速度有关。又如魏北(Weber)假定兩电分子之相互作用不僅依存于它們的距离，且与其速度及加速度有关。如果物質点之相互引力也依照与这个相似的定律，则 U 必依存于速度而它可能包含一个与速度平方成比例的数項。

然而在与速度平方成比例的数項中，怎样辨别來自 T 或 U 的数項呢？因此又怎样区别这兩部分的能呢？

还有，能的本身又怎样下定义呢？倘若 $T+U$ 的特性、即其为一特別形式的兩数項之和之特性消失了之后，則我們毫無理由以 $T+U$ 而非其他 $T+U$ 之函数为定义。

然这还不算数，我們不單要留意純粹的机械能，此外还要計算別种形式的能，卽如热、化学能、电能等等。故能量守恒原理当以下式表达：

$$T+U+Q=\text{const.}\ (\text{常数})$$

其中 T 代表可感覚的动能，U 为位置的势能，而只依賴物体之位置，Q 为分子內部之能，其形式則或为热的，或为化学的，或为电的。

如果这三数項都是絕对不同的，如 T 与速度平方成比例，U 与这些速度及物体之物态無关，Q 与速度及物体之位置無关，而只依賴其內部的物态，則一切均可順利進行。

能之表达式只能用此唯一的方式分为这三数項的形式。

其实并非如此。假定有几个荷电的物体：其相互作用所生之靜电能当然依存于其所受电荷，卽其物态；然而它同时与物体的位置也有关系。如果这些物体都在运动中，則彼此必生电动力作用，而电动能不特依存于物态和位置，且与其速度有关。

所以我們再也沒有方法可以抽出某某数項当屬于 U 或 Q 或

T'，而把这能量之三部分划清楚。

倘若$(T+U+Q)$是常数，则其任何下列函数亦然。

$$\varphi(T+U+Q)$$

倘若$(T+U+Q)$是我上面已考慮过的一种特别形式，則結果亦不致有混淆；在为常数的諸函数$\varphi(T+U+Q)$中將只有一函数具有此种特別形式，而正就是这个，我約定叫做能。

但我已經說过，实在并不是嚴格如此的。在为常数的諸函数中，沒有一个可以嚴密地化为这样特別的形式；然則怎样在这些函数中选擇那个該当称为能的函数呢？我們再也沒有什么可作我們选擇的指導了。

我們只剩了一个能之守恒原理的陈述；那里有个东西是常定的。这样說法，这个原理也脫离了实驗之攻击，而变成一种重复語(tautologie)。顯然假使世界受定律統治，則其中有些数量自必是常定的。以实驗为根基的能之守恒原理，有如牛頓的原理，并且为了相似的理由，也不会被实驗所否定的了。

这个討論指出由經典的系統來到能的系統，人們已經獲得一种進步；但它同时也指出这个進步还是不够的。

我認为还有一个反駁更重要：就是最小作用可应用在可逆变的現象中(phénomene réversible)；而在不可逆变的現象中就不能应用。亥尔莫慈想把它推廣到不可逆变的現象中，但是沒有成功，这也本是不能成功的，在这种情形之下，一切还待努力。

甚至最小作用原理之陈述本身也有点抵触理智。譬如强制在一面上运动而脫离了一切外力的物質分子要从此点來到彼点时，將取道于此面上之短程綫(ligne géodésique)，卽路徑之最短者。

这个分子似乎自己知道人家將要引它到某点去，能預算从某

路綫达到某点当費时若干，然后再揀定最适当的路徑。照上面的陈述看來，这个分子似乎是能动而自由的生物了。顯然最好把这陈述換一个比較少抵觸理智的陈述，而那里，有如哲学家的口气，最后因(causes finales)不像是去代替实效因(causes efficientes)。

热力学①——热力学中兩大基本原理在自然哲学中的作用日見其重要了。我們放棄40年前的那些充塞着分子假設的野心的理論，我們今日想把数学物理全部大廈建立在唯一的热力学上。試問克魯秀士(Clausius)与梅耶(Meyer)之二原理可作它的巩固的而有些持久的基礎么？这是無人怀疑的，但这个信心是从何而來的呢？

某日有一位高明的物理学家和我談到誤差律(loi des erreurs)时曾說，大家所以都坚决相信它的緣故，是因为数学家以为这是观察的結果，而在观察者以为这是数学的一定理。能之守恒原理很久就是經过了这种情形。今日則不然。沒有人不知道这是实驗的事实。

然則是誰給我們的权力，讓我們对这原理看成比那些証明这些原理的实驗更为精确、更为普遍呢？这个問題好比人家常常在那里問推廣經驗的数据是否合法，但我却不敢討論这个問題，因为已經有許多的哲学家想解决而終于未能。唯有一事是确实的：就是如果我們沒有这个能力，則科学將不能存在，或至少要化成一种財物清單，一种孤立的諸事实之观察，这样則科学对于我們將是毫無价值，因它將不能滿足我們对秩序及和諧之要求，且它同时也將無預見之明了。由于在一件任何事实先前的种种情况大概永远不会同时統統再產生，这就已經应該作第一次推廣，來預測当这些情

① 下文系我所著热力学一書中序文之一部分原文。

况有一点点变动时，那事实是否还能重新發現。

然而凡是命題都可用無窮的方式來推廣。在一切可能的推廣中，我們一定要有所选擇，而我們只能取那最簡單的。所以我們被引到这一行动的方針，就是認为一个簡單的定律（虽然其他一切都是一样），好像总比复雜的定律为可靠。

五十年前，人們已老实承認这点了，并且宣言自然界欢喜簡明；然而从那时起自然界已給我們極多的反証。現在人們已無此种傾向，而只保留那不可缺少的，使科学不致成为不可能。

經过比較上不算多而表現某些分歧的若干实驗，來形成一种普遍的、簡明而准确的定律的时候，我們所干的只是服从了一种需要，这种需要是人的理智所不能缺少的。

然而此外还有一層，所以我还要論列。

沒有人怀疑从一切特殊的定律中引出的梅耶原理比这些定律要廣泛，有如从凱普勒諸定律中引出的牛頓定律要比它們廣泛，它們只是近似的，假使我們計及擺动作用（perturbation）。

为什么这个原理在一切物理的定律中占据一个特别重要的位置呢？其中頗有許多的小理由。

第一，人們相信我們除非承認永恒运动之可能性的时候，才能推翻这个原理或甚至怀疑它的絕对嚴密性；不必說我們对于这种远見是抱怀疑态度的，而我們自信对于这个原理与其否認不如承認它为妥当。

这也許不完全正确；由永恒运动之不可能性，虽可導出能之守恒原理，然这僅限于可逆現象。

那梅耶原理之簡明性也有助于加强我們的信心。由实驗直接引出的定律，例如馬略特（Mariotte）定律之簡明性反会使我們不

信任。但此地則不然，乍看上去，我們只見到一些不調和的元素在那里排成一种出乎意外的順序，而形成一个和諧的整体；而我們决不相信这种出人意料之和諧簡單地是偶然的效果。这好像是我們犧牲的力量愈大，我們所獲得的勝利愈是宝貴，或者說那自然愈怕我們去揭露它的秘密，我們就愈确信已經从它那里搶得了眞秘密。

然而这还不过是些小理由；如要把梅耶定律建立为一个絕对的原理，那就还要經过一番更深刻的討論。但人們如去試行，人們就看到这絕对的原理，連陈述它也不是容易的事。

在每一个特別情形中，人們可看清楚能是什么，并且至少可給它一个暫时的定义；但要找出一个普遍的定义，那就不可能了。

假使要把这原理尽量普遍化地陈述出來，并且应用之于宇宙間，那便可說它竟会消失了，而剩下的只是：*其中有些东西是常定的*。

但連这句話也有意义嗎？据确定派(déterministe)的假設，宇宙的狀态是用極大数目之 n 个参变量規定的，我叫它們 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$。人們在任何时，一知道这 n 个参变量之值，也就知其对于时間之導数，由是就可計算这些参变量在先前或以后之值。換言之，这些 n 参变量可滿足 n 个一階微分方程式。

这些方程式有 $n-1$ 積分，故亦有 $n-1$ 个含有 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 之函数，且为常定的。所以假使我們說*其中有些东西是常定的*，我們所說明的只是重复語。我們甚至很难說在这些積分中，那一个当保存能之名称。

然而当人們把梅耶原理应用在有限止的系統中时，人們对于这原理并不是这样來理解的。

于是人們承認在我們所說的 n 参变量中的 p 个各自独立的变

动，因此我們只有这 n 参变量及其導数間之 $n-p$ 的关系，这关系一般是綫性的。

为簡化陈述起見，假定外力工作之总和为零，向外播散之热亦然。于是且看我們的原理的意义何在：

在这些 $n-p$ 关系式中，有一种組合，其左項为全微分；于是根据我們那些 $n-p$ 关系式这个全微分既为零，則其積分为常数，而就是这个積分我們叫做能。

然而其中怎会有許多的参变量是各自独立变动的呢？这种情形只有在受外力的影响下才能產生（虽然为簡便起見，我們已假定这些力的工作之代数和为零）。事实上如这系統完全脫离一切的外力，則我們的 n 参变量在某定时之值已足拿來規定那系統以后任何时間的情态，但只要我們常守着确定派之假設；因此我們又和上面一样，遇着同一的困难了。

某系統將來之情态所以不完全为它現在的情态所确定，是因它还要依存于系統以外的物体的情态。然則在規定这系統的情态之諸参变量 x 中，存在着許多与外物之情态無关的方程式是可确信，而如在某些情形中，我們相信能够找到若干方程式，这是否只因为我們的無知，并因这些物体的影响太微弱，以致我們的实驗不能發覚呢？

如果这系統不是認为完全孤立的，則其內能之嚴密精确的表达式当与外物情态有关。并且在上文中我是已經假定这外力工作之和为零，而我們如要免除这个有点人为的限制，則更不易陈述了。

所以为要建立梅耶原理，而給与一个絕对的意义，那就应該把它推廣于全宇宙，但这样我們正要避免的困难又呈現在面前了。

总而言之，且用普通的說法，能之守恒定律只能有一种意义，此即在一切可能的意义中有一共同的特性；然依确定派的假設，只有唯一的可能，因此那定律便毫無意义了。

反之依照不确定派的假設，即使人們把它看做有一个絕对意义的，那定律將仍有一个意义；这定律好像是加在自由上的一种限制。

然而自由这个字，警告我跑錯了路，而且我快要跑出数学与物理的范圍之外了。所以我停止，而在这番討論中，我只要保留一个印象，就是梅耶定律的形式是相当柔軟以致能够讓人任意將差不多一切都放進去。我的意思不是說这定律毫無客观的实在性，也不是說它只是一种重复語，因为在每一个特殊情形中，且只要人們不去一直推到絕对，它总有一十分明白的意义。它这种的柔軟性，更足以使人相信它的持久，并且，在另方面，既要等它溶化于更高級的和諧之中才得消滅，我們可以安心地依靠它而去工作，并且可以預先确信我們的工作决不会白費了的。

上面我所說过的几乎全可应用于克魯秀士原理上。它的特点是在于用不等式表达出的。或者人們將說一切物理的定律統統是如此的，因为它們的精密程度总是被观察上的誤差所限止的。但它們至少自命以第一次近似的姿态出现，而人們有希望將來可用逐漸精确的定律去慢慢地代替它們。但克氏原理之所以化为不等式，并非由于我們观察方法之不完善，而是由于这个問題之本身性質的原故。

第三部总結。

所以力学諸原理对我們以兩种不同的姿态表現出來。一方面，这些是建立在实驗上的眞理，对于差不多孤立的系統可算是核

驗得很近似的了。另方面，这是些可以适合于宇宙全体而且被認为嚴格眞实的公設。

这些公設，其所以有一种普遍性与确实性，而这反为它們所自出的实驗的眞理所缺乏者，正因为它們到最后分析便化为一种簡單的公約，而这是我們有权做的，因为我們預先可以确信它是不会受任何实驗所反駁的。

不过这种公約并非絕对任意的；它不是由我們的私意而出；我們采用它，因为有些实驗向我們指出它是便利的。

这样人們就可解釋实驗如何建立了力学諸原理，但实驗又为什么不能推翻它們。

我們試用几何学來比較。几何学中基本命題，例如欧几里得公設，也不过是些公約，但如要問它們是眞的，或是假的，則其不合理正如問米达制是眞的或是假的了。

不过这些公約是便利的，而这是若干实驗告訴我們的。

起初这个相似性是完全的；实驗在这兩者之中似乎有同样的作用。所以人們会想說：或者力学当認为一种实驗的科学，因此几何学亦必如是，或者相反地几何学是一种演繹的科学，因此人們对于力学也可这样說。

像这种的結論未免不合法了。使我們認几何之基本公約为較便利而采用它的那些实驗所根据的对象完全与几何学所研究的对象不同；这些实驗是以固体之特性及光綫直綫性为对象的。这些都是力学的实驗，光学的实驗；而無論用何种名义，也不能把它認为几何学的实驗。就連我們的几何学对于我們覚得便利的主要原因是因我們身体的各部、眼睛、四肢正具有固体的性質。照这样說，我們的基本实驗就是生理学的实驗，所以实驗的并非空間，这

空間是几何家研究的对象，而所实驗的是在身体上，也就是他研究几何时所需用的工具。

反之，力学的基本公約以及証明它是便利的那些实驗，都有同一的或相似的对象。公約式的而普遍的原理是特殊的与經驗上的原理之直接而自然的推廣。

我希望人家不要說我在科学間划出界綫來；而假使我把固体的研究与純粹的几何学隔开，我照样也能在普遍原理之公約式的力学与实驗的力学兩者中間另立一种界限。事实上我若把这兩种科学分开时，誰不見到我就会把它們都伤害了，而公約式的力学一孤立之后，將只剩很有限的东西，而絕不能与这偉大的学說即所謂几何学相比呢？

現在我們可以明白为什么力学的講授还是应該为实驗的。

只有这样才能使我們明白科学的萌芽，而这对徹底明白科学之本身是不可少的。

而且我們研究力学，是为了应用；而如要应用它，則它非是客观的不行。但是根据我們所已經說过的，凡是那些原理在普遍性上与确实性上有所得，在客观性上便有所失。所以要緊的，是在把原理的客观性方面及早熟悉，而这要从特殊的到普遍的而不去取相反的步驟才能做到。

凡原理都是些伪裝的定义与公約。不过它們仍是由实驗的定律引出，故这些定律可說是用我們認为有絕对价值的原理樹立起來的。

有些哲学家未免推廣得过分了。他們以为原理就是全部科学，因此以为全部科学乃是公約的。

这种荒謬的学說，所謂唯名主义，实在不值一談。

一个定律怎会变成原理呢？它能表明 A 与 B 二項間之关系。然这定律不是嚴格眞实的，它只是近似的。我們任意地加進一个多少是幻想的中間項 C，而照定义 C 卽是与 A 恰好有为定律所表示的关系的那一个。

于是我們的定律分解为二：其一表示 A 与 C 之关系的絕对而嚴密的原理；其二，表示 C 与 B 之关系的近似的而可修正的实驗定律。顯然地尽管我們再繼續的分解下去，所剩下來的还是一些定律。

我們現在到眞正的定律范圍中去。

第四部　自然界

第九章　物理学中的假設

实驗与推廣之作用——实驗乃眞理的唯一泉源：唯独它能告訴我們一些新事物；唯独它能給我們一种确实性。这就是誰都不能反对的兩点。

然則假使实驗包括一切，則数学的物理学（la physique mathématique）的地位又將怎样呢？实驗物理学要这个好像無益的并且甚至危險的助手又有何用呢？

但是数学的物理学还是存在着，它所完成的功劳又是不可抹殺的；这里必有一种事实要說明的。

这就是單單去观察是不济事的，必要利用这些观察，因此所以要推廣。这正是一向人家都做过的；不过因为想起从前的錯誤，有了前車之鑒，人家就漸漸地格外愼重，多从事观察而逐漸減少推廣了。

每一世紀的人总喜譏誚前世紀的人，怪他們推廣得太快又太老实了。笛卡兒曾可憐那些伊洪学家（Ioniens）；然而笛氏自己又惹我們微笑，而我們的子孙必將譏笑我們，这是無疑的。

然則我們难道不能馬上走到尽头嗎？这不是我們免去所預料的遺笑之方法嗎？我們不能將赤裸裸的实驗認为满足嗎？

不，这是不可能的；这样未免太不懂得科学的眞正特性了。凡

是学者应当做整理的功夫,人們靠着事实建設科学,正如用磚石筑成房屋;然而許多事实之不成其为科学,正如一堆磚石之不成其为房屋。

并且最要緊的,学者应当有預見之明。高立尔(Carlyle)在某处曾經說过:"唯独事实是要緊的;法王約翰無土(Jean Sans Terre)曾經过此地,这眞是件很可讚美的事,为此事实我願給出天下所有的理論"。

高立尔是培根的同胞;但培根却不会这样說。这是歷史学家的口胳。物理学家就要这样說:"法王約翰無土曾經經过此地;但这与我毫無关系,因为他再也不会經过此地了"。

我們大家都知道有好的实驗,也有坏的实驗。假若是坏的,那就再多也是無用的;人們做它一百个也好,做它一千个也好,經不起一位眞正的学者,例如巴斯德(Pasteur)做的一种工作,就可把那些实驗都压倒,甚至于忘掉。我想培根是很明此理的,是他發明那"交叉实驗"(Experimentum Crucis)名詞的。但这是高立尔不会懂得的。事实便是事实;一个小学生毫不注意地讀下了温度計的度数;不管他注意不注意,横豎他已經讀过了,但如只以事实算数,那么这里是和剛才法王約翰無土远游这回事同样地是实在了。何以那位学生做的这件讀数的事实沒有意思,而若是一位能干的物理家讀了另一数的事实就將是很重要呢?这因为前者所看的度数,我們絲毫無可結論。然則何为好的实驗?好的实驗就是除了一件孤立的事实外,还能告知我們别的东西;这就是使我們能够預見,亦卽能够讓我們推廣的一种实驗。

因为若無推廣,則預見是不可能的事。在某些境况下,人們做了实驗,但这些境况从來不会完全再發生。所以观察过的事实,以

后再也不会开始了；人們所能肯定的唯一事情，就是在相似的境况之下，当有一相似的事实發生。可見想要預見，至少要引用相似性(l'analogie)，这就是已經推廣了。

人們無論如何胆小，总要去內插；实驗只給我們一些孤立的点子，要用一条連續的綫把它們接合起來；这里是眞正的推廣。但是人們做的更多，这画出來的曲綫，是在这些点子之間和附近穿繞而过的；并非恰恰地通过这些点子。所以我們不僅自限于推廣实驗，并且还要矯正它：凡是不願做这种的修正，而以赤裸裸的实驗为滿足的物理学家势必說出許多离奇的定律來。

所以，赤裸裸的事实对于我們是不够的；因此我們要有經过整理的科学，卽有組織的科学。

人們往往說，做实驗必不可存一种成見(idée préconcue)。这是不可能的；这样不但一切实驗將变为廢物，并且似乎人們情願把它变为不可能的了。各人有各人的世界观，而不易改观。例如，我們是用言語才能有所表白，而我們的言語中充滿的正是这些成見，却也不能有別的。不过这是些不知不覺的成見，眞比別的还更危險一千倍。

我們可以这样說，如果我們加入了一些我們完全自覺的其他成見，我們只会更加重坏处！我不相信，我想这些或可做为相互平衡的权重，我將說这可作为解毒藥；它們相互之間总是合不好的；它們彼此必互相冲突，因此我們不得不把事物反复从各方面去仔細考察。这样已足使我們獲得自由：好比能够选擇主人，就不再是奴隸了。

这样，靠着推廣，每一观察的事实可使我們預見許多的事实；不过我們不要忘記只是第一事实是确实的，其他的都不过是大概

的罢了。一件預見之事，看上去無論怎样穩固地奠定，当我們去核驗它的时候，我們从來不能絕对相信它不会被实驗推翻的。但这可能性往往是很大，以致我們实际上可以認为滿足。与其毫不去預見，还不如去做不确实的預見。

所以有机会的时候我們万不可不屑去做一番核驗的功夫。但凡实驗都是很長很难的，而勤力的人是不多的；而我們所需要預見的事实为数正是無窮；我們所能做的直接核驗的数目对于那样大的数量眞同滄海一粟。

我們希望从我們所能直接达到的这一些实驗中抽出最好的效果；应該每一实驗能給我們最多的預見和尽量地含有最大的可能性。这个問題可以說是在于增加科学机器的效率。

請試以科学与日益擴充的圖書館相比；圖書館館長的經費既不充裕；館長应当不浪費。

这是实驗的物理学負買書之責；所以唯独它能使圖書館丰富起來。

至于数学的物理学，其任务在編訂書目。而書目編得再好，也不能使圖書館增加財富。但它能有助于讀者之使用其丰富的藏書。

而且它可把藏書缺点之所在指示圖書館長，使他下次購書格外恰当合理；此事在經費愈少时愈是要緊。

这就是数学的物理学的作用；它应当指導推廣以增加我剛才所說的科学机器的效率。但它用何种方法以达到此目的，且怎样安全地去做，这是还要討論的。

自然之統一性——首先我們要注意一切推廣，在某种程度上，假定对自然界之簡明性与統一性有信心。关于統一性，这个問題

不会有何困难。如果宇宙之各部分不是像一物之各机構，則互相不生作用，它們將相互不認識；而尤其是我們將只能知其一部。所以我們就不必問那自然是整个的，而是問它何故是整个的。

关于簡明性这个問題，就不是这样容易的了。自然界不一定是簡明的。我們可否当它是这样的去做而無危險呢？

从前馬略特定律之簡明性一度被引为此定律的正确性之論据；从前弗勒納尔(Fresnel)自己有一次与拉卜拉斯(Laplace)談話时，曾說过那自然界毫不顧慮解析上的困难，后來他恐怕抵触群意太甚，又自觉非加以解釋不可。

今天一切观念都大变了；但那些不相信自然界的定律一定是簡明的人仍旧不得不作为相信似的干下去。他們不能完全脫离这个需要，除非是把一切的推廣，因而一切科学都弄成不可能。

一件任何事实顯然可用無窮的方法來推廣，但要緊的是选擇；而选擇只能以簡明为标准。我們試以最平常的例子如內插法(interpolation)作比。我們在观察所給与的点子之間，穿过一条尽可能整齐的連續綫。为何我們要免去这些角点，以及太急促的屈折呢？为何我們不在那曲綫上画出最任性的弯轉曲折之形？这因我們預先知道或我們自信知道，那要表示的定律不能如此复雜的。

木星的質量，可以或由它的衞星运动測知，或由那些大行星之攝动測知，或由那些小行星之攝动測知。我們如將此三法所測定数平均，乃得三个近似而各異之数。說明这个結果时，我們可以假定引力系数在这三情形中是各不相同；因此对观察所得的結果当然表示較好。然則我們为何舍去这种解釋而不用呢？这不是因为它荒謬，实因它是無用的繁复。要到了不得已不采用它的时候，我們才去采用它，現在还不必。

总之，普通凡是定律总被認为簡明，一直要碰到相反的証明才止。

这个習慣之所以支配着物理家，已如我剛才所說；然而臨着这些天天指示我們以更复雜而更丰富的細節的新發現，怎样使这种習慣合法化呢？而且如何把它与自然統一性的情緒相融洽呢？因为倘若一切以全体为轉移，則这样多的不相同事物参加的各种关系必不再能簡明了。

我們試研究科学的歷史，我們可見到兩种可說是相反的現象：有时是簡明藏匿在复雜的外表下面，有时相反地簡明是表面的而它却是隱蔽着非常复雜的眞实。

那有再比行星的攝动运动更复雜；那有比牛頓定律更簡明呢？这正如弗勒納耳說过的自然界在那里玩弄解析的困难而只用一些簡單的方法，經过彼此互相組合之后，就發生一种不可言喻的难解乱絲。簡明正是藏匿在这里，正应当去發現它。

相反的例子也多極了。在气体运动理論中，人們考慮具有極大速度的分子，它們的軌道，受不断的冲击，变成最奇怪的形狀，并且在空間四面八方都布满了它們的路迹。可观察到的結果，就是馬略特簡明定律；每一种个別的事其实是复雜的；大数定律恢复在平均中的簡明性。这里的簡明只是表面的，而我們感官的迟鈍，正是阻碍我們不能見到此中之复雜。

好多的現象都是服从一种比例的定律；何故？因为在这些現象中，有一些东西是很小的。因此所观察得的簡明的定律，不过是这种普遍的解析規則之翻譯：照这規則，某函数之極微小的增量与其变数的增量成正比例。实际上，我們所謂極小的增量并非極小，不过是很小罢了；所以比例的定律也無非是近似的，而那种簡明只

是表面的了。我刚才所說的，可以应用到微小运动之叠加規則上，这条規則用处極大，且是光学的基礎。

至于那牛頓定律本身呢？它的簡明性隱匿得这末長久，也許只是表面的。誰知道它不是一种复雜的力学作用，或生于一种受不規則运动的微妙物質碰撞之影响，誰知道它不是只靠着大数与平均数的一套把戲才能成为簡明呢？無論如何，若不假定那眞正的定律含有补充的数項，是很难的，这些数項在短距离时，便有效用。假使在天文学中，它們比牛頓公式中之数項來得可忽略，而如定律因此又得到它的簡明性，那么这只因为天空中的距离極为巨大的关系。

無疑的，假使我們观察的方法日漸精密，我們便可在复雜的里面找出簡明的东西，再由簡明里面找出更复雜的东西，如是循环不已，我們便不能預料最后將是什么。

在这个進程中，我們势必要停留在什么地方，而为了科学可能起見，在遇到簡明的地方，就应該停下來。这里正是我們唯一的地盤，在这上面我們才能建設一切的推廣。然而这簡明既只是表面的，这塊基地是否能够坚固呢？这是应該研究的。

为此，請看簡明性之信心在我們的推廣中起何作用？今我們已經在許多特例中檢驗了一条簡明的定律；我們不承認这常有的遭遇只是偶然之事，因此我們結論那定律在普通例中也应当是眞实的。

凱普烈（Képler）注意到狄哥（Tycho）所观察的一行星的位置都是在同一的橢圓上。他从未想到狄哥因一种奇怪的偶然每次观天时，都是正当那星球眞正的軌道与那橢圓曲綫相交的时候。

所以簡明性是实在的或者它隱藏着一种复雜的眞理，这有何

关系？ 不管它是消去各个别相差的大数的影响之作用，或者是可以略去几个数項的若干数量之大小的作用，無論如何，它总不是偶然的作用。这种簡明是表面的，或是实在的，总有一个原因在。所以我們总可做同一的推理，且如一簡明定律曾經在好几个特例中观察过，我們便可很合理地假定它在相似的情形中还是眞实的。我們若对此否認，那就是給偶然以一种不可承認的作用了。

但是其中有一个区别。如果那簡明性是实在而深刻的，則我們的测量工具的准确無論如何進步，則这种簡明性仍旧不会搖动；所以我們如果相信自然界具有深刻的簡明性，則我們也該从一种近似的簡明性結論到嚴密的簡明性。这是从前人們做过的；这是我們現在再無权去做的了。

譬如，凱普勒定律之簡明性不过是表面的。这虽無碍于它对于一切如太陽系之系統大約都可适用，但要說它是嚴密眞实的，那就不能了。

假設之作用——凡是推廣都是一种假設；所以假設有必需的作用，这是誰也不会反对的。不过它应当常常的經过核驗，并以愈早愈多为妙。不必說，它如經不起这种考驗，人們就当不惜把它拋棄。普通人們是这样做的，但有时总帶几分不高兴。

其实就連这种不高兴也是不合理的；物理家当他拋棄他的假設之一的时候，应当反而十分快活，因为他正是得了一个求之不得的發明的机会。我想他的假設不是輕易采用的；它已經顧及到一切好像能参与現象的各已知因素。假使不能核驗，这其中必有料不到而非常的事；这正是我們要去尋覓的未知与新鮮的东西。

那么这样推翻的假設是無效果的么？大为不然，我們可說它比眞正假設的功劳更大；不但它是一种决定性实驗的机会，并且人

們若不曾作假設，只在偶然中作了这个試驗，則人們將一無所得；人們將不能見得非常的东西；人們不过多編進了一件事实，而不能从中得到什么后果。

現在要問在什么条件之下利用假設，才不致有危險？

單單决心去实驗是不济事的；此外还有危險的假設；最主要的就是暗示的与無意識的假設。我們旣是不知不覺的作了，因此也無能力抛棄它。这里还是数学的物理学可以協助我們。以它固有的那般精确性，它迫使我們确立一切不用它我們也会做的假設，但我們并不怀疑它。

另方面，我們当注意不可濫用假設，并且只能依次而用。我們如果把一理論建立在許多的假設之上，一旦被实驗推翻，則在吾人所有的前提中当換去哪一个呢？这是不得而知的。反而言之，如果实驗成功，人們可相信所有的假設都被核驗了嗎？人們相信只用一个方程式就求得了几个未知数嗎？

此外还要好好地把各种的假設区别一番。第一，其中有一种很自然的假設，是我們所难于免去的。比方我們不能不假定那很远的物体之影响完全可以忽略，那微小运动是遵守綫性定律的，又如效果乃其原因的連續函数。我对于对称定律所支配的条件，認为也是这样。所有这一切的假設，可以說是組成数学的物理学所有的理論之共同基礎。人們到最后才能把它們舍去。

此外还有第二类的假設，姑名之曰無关的假設。在大多数問題中，分析家在演算之初便假定物質是連續的，或反是原子所組成的。無論他做哪一种假定，其結果則一，不过求得有难易而已。所以如果实驗証明他的結論时，他就以为証明了原子是眞实存在的嗎？

在光学中有兩种矢量(vecteurs)。其一是認为一种速度，其一

五

是認为旋渦(tourbillon)。这还是一个無关的假設，因为我們如把它們調換过，結論还是一样；所以实験之成功不能証明第一矢量果为速度；它只証明一事，就是这是一个矢量；这是我們在前提中所加入的唯一的假設。要給它一个我們理智的薄弱性所要求的这种具体外表，那就应該或者把它看做一种速度，或者是一种旋渦；正如我們应該用 x 或 y 字來表示它，但結果無論如何，并不証明把它当做速度是对了或錯了；正如叫它 x 或 y 时不見得就对了或錯了一样。

这些無关的假設，只要我們認識它們的特征，是永不危険的。它們是能够有用的，这或者作为計算的技巧，或者用具体的形象來支持我們的意識，正如人說为固定思想起見，所以这些是無須禁止的。

第三类的假設是眞正的推廣。正是这些假設是实験該当証实的或否認的。不問是核験了或推翻了，它們可能是丰產的。然而为了我說明过的理由，非得我們不增加它們的数目才能够是这样。

数学的物理之起源——我們現在要進一步仔細去研究那些开展数学的物理学的条件。我們第一就看出一般学者总是勉力去解决实験直接給与的复雜現象，要把它分解为許多基本的現象。

这有三种方法：第一，是在时間里的。与其把現象的逐步發展作全部的包罗，人們寧願把某一时刻与前一时刻相連接起來；人們承認世界的現在情形只依存于最近过去的时代，而不直接受可說过去已久的記憶之影响。根据这个公設，与其去直接研究現象一切过程，人們寧可只寫出它的“微分方程式”；人們把凱普勒定律代以牛頓定律。

科学

其次人們想法在空間里分解現象。实験所給我們的乃是一个

紛乱的事实，表演在一定的廣延的戲台上；要設法去辨別那些基本的現象，这現象反而是局限在空間的極小的部分。

举几个例子就可說明我的意思。今有一慢慢地冷却下去的固体，要去研究其中温度分布的一切复雜情况是永世做不到的。只要想一想那固体之一点不能向远隔的一点直接傳热，那么一切都变为簡單了；它只能傳热于最貼近的点，再由这些点逐步傳开去热流才傳到物体的它部。那基本的現象就是二鄰点之热的交易；它完全局限于一小部分，且比較上是簡單的，只要人們承認（而这似乎很自然的），那交易現象不受距离較大的分子的温度影响。

現在我屈折一根鞭子，它卽刻变为極复雜的形狀，而是我們不可能直接研究的；然我仍可去試一試，只須注意它的曲折只是鞭內很小元素变形的总和，并且每元素的变形只依存于那些直接加上去的力，而絕非加在其他元素上的力。

在这些我可以不費力再添上許多的例子中，我們承認沒有超距作用，或至少沒有相距甚远而發生的作用。这却是一种假設；它不是常眞的，地心吸力定律可作証明；所以应当把它來核驗；如果它是証实了，卽便是近似的，它也是可宝貴的，因为这足以使我們至少用漸進近似法研究数学的物理。

如果这个假設經不起試驗，那就要另找其他类似的东西，因为此外尙可用他法以达到基本現象。倘若有許多的物体同时作用，有时它們的作用也許是独立的而是簡單地相互疊加的，至于疊加的方式是或如矢量的，或如标量的。所以基本現象乃是孤立的物体的作用。又或者是我們对于微小运动，更普通点，对于微小变动打交道，这些微小变动是服从那著名的疊加律的。于是观察得來的現象，將可分为簡單的运动，例如音之分为諧音，光之分为單色

光。

当人們已經識别要从那方面尋找基本現象，試問用何方法才可达到目的呢？

第一，为了猜想它，或説，为了猜度有益于我們的，那就常常不一定深入它的机構里面；我們只要曉得由大数得來的定律就够了。我們試再以热之傳播为例；每分子向鄰近的分子傳热；至于按照什么定律，这是我們不必要知道的；假使我們在这一点上有所假設，則將是一种無关的假設，所以这既是無用的，并且不可核驗的。其实有了平均的作用以及根据媒質的对称性，一切的差别都拉平了，且無論做了那种假設，結果总是一样的。

在彈性理論中与毛細管現象理論中有同样的情况發生；鄰近的分子互相吸引，或互相推拒；我們不必知道这按的是什么定律；只要这吸力只能在小距离以內才有感覚，只要分子是極多的，只要媒質是对称的。而我們只要讓大数定律去支配一切就好了。

这里还是基本現象的簡明性隱藏在可观察的总現象的复雜里面；不过这个簡明性也只是表面的，內里尙有很复雜的机構。

求得基本現象的最好方法当然是实驗了。这应当用实驗上的巧法以解散那自然界給我們研究的一束复雜而仔細研究提鍊得尽量淸楚的元素；例如人們用三棱鏡分光为七色，用偏振器分光为偏振光。

所不幸者，这不是常常可能的，也不是常常足够的，而有时我們的理智要超前实驗才行。我只要举一个那常使我很驚异的例子：

我如分解白光，我可孤立一小部分的光譜，但無論如何小，它总保有一定的寬度。同样，所謂**單色光**的自然光呈現一条很細的

譜綫，但并非無窮的細。我們可假定用实驗來研究这些自然光的特性时，用逐漸变細的譜綫來試驗，最后來到可說是極限时，我們便可認識一种嚴格的單色光之特性。

这是不确实的。我假定有从同一光源射出的二光綫，人們使它們先在二垂直之偏振器穿过，使成为在兩垂直平面中之偏振光，再把它們回到同一偏振平面中，然后使它們起干涉作用。如果光綫是嚴格單色的，則它們就会干涉了；但我們的光旣是差不多的單色光，就沒有干涉作用，而这是不問譜綫之如何細的；假使不是这样，那就应該叫这譜綫細到比較已知的最細譜綫还要縮窄几百万倍才行。

所以在这里，我們被达到極限这一过程所騙了；这是要理智超前实驗才行。而它这样做之能成功是由于它被簡明性本能指導之故。

知道了基本的事实，我們就能把問題寫为方程式；于是經了些組合，就可推出那些可观察的与可核驗的繁复事实。此即所謂積分法；而这是数学家的本事了。

人們可問何以在物理科学中，推廣法很自然地成为数学的形式。这个理由現在是很易明白的了：这不特是要表达数的定律；还因可观察的現象是由許多相似的基本現象堆積而成；这样，微分方程式就很自然的導入了。

僅僅每一基本現象服从簡明的定律是不够的，还要那些正待組合的現象服从同一的定律。唯独这样。那数学的参加才有益处；事实上，数学教我們把相似的东西与相似的东西組合起來。它的目的是在猜想一組合之結果，而不必再一塊塊地重新組合起來。如果人們要把同一的演算，要重演至数次，数学則讓我們用一种归納

法,使我們預先知道結果,就可以免去了这种的重复。这是在前面数学推理一章中我已說明的了。

然而为此,一切的演算当互相类似;否則自然要忍耐着实际的依次做下去,而数学將成为無用的了。

所以这全靠物理学家所研究的物質之近似的均匀性,那数学的物理学才能產生。

在博物学中,就再沒有这些条件:均匀性,远离部分之相对独立性,基本事实之簡明性,而为了这个原因,那博物学家就不得不求助于別的推廣方式。

第十章 近代物理学之理論

物理学理論之意义——普通人很奇怪那些科学理論的不能持久。他們看見那些理論經过了几年的丰收就被人先后的抛棄;他們只見到殘毀層層堆叠;他們預見到現在風行一时的理論,霎时間就要变成明日黃花,因此結論它們是絕对無效的。这就是他們所謂科学之破產。

他們这种怀疑是膚淺的;他們全不懂得科学的理論之作用及目的,不然他們可以明白就是那些殘毀也还是有用处的。

弗勒納尔曾認为光卽以太之运动,这个理論似乎是再堅固也沒有的了。然而現在人們却丟了它而喜用麥克思韋的理論了。然則弗氏的工作可說是徒然的嗎?不,因弗氏之目的不是要知道眞正有無以太,以及它是否为原子所成,这些原子是否往某某方向运行;而为的是預測光学現象。

而这却是弗氏理論在麥氏以前或在今天永远可以做到的。其

中微分方程式总是对的；我們总可用同样的方法計算其積分的，而所得之結果，总保存它們整个的价值的。

但是請人們不要說我們这样是把物理学理論变成一种实用的簡單方術；这些方程式表示一些关系，而这些方程式之所以仍旧是对的，因为这些关系能保存其实在性。或前或后，它們能告訴我們某些物与另些物之間有何种关系；不过，这某些物我們从前叫它运动，現在却叫它电流了。然而这些名称不过是代替眞物的影像，至于眞物是永被自然遮着。在这些实在物之間的眞正的关系是我們能达到的唯一实在，而唯一的条件，就是在我們不得不用來代替它們的那些影像之間，一如在这些眞物之間，当有同样的关系。倘若知道了这些关系之后，那么我們如認为便利时，又何妨把此一影像代以另一影像。

假使把一週期現象（例如电振动）看成的确是由于某原子的顫动，原子有如一鐘擺眞是擺來擺去，那么这事旣是不可靠的，又是沒有趣味的。但是假使說在电振动与鐘擺运动以及其他一切週期現象之間有一种相应于一种深刻实在的密切关系；而这种关系，这种相似性，或可說这种平行性連在細節之处都有；或者說它也許是較普遍的原理的后果，卽能量原理与極小作用原理的后果；这却是我們可以肯定的；这都是永久存在的同一个眞理，那怕我們認为有必要把它奇形怪狀地改裝。

关于色散問題，人們已提出过許多的理論；起先的是不完善的，而且只含有一小部分的眞理。后來就有亥尔莫慈（Helmholtz）的理論；其后人們又把它用各种不同的方法來加以修改，連亥氏自己也曾根据麥氏的原理，創立一說。然而可奇的事，就是这些在亥氏以后的学者，各由表面上大为分歧的起点，都獲到同样的方程式。

我敢說这些理論一齐都是眞实的，这不僅因为它們能使我們預測到同样的現象，并且因为它們都能顯示一种眞实的关系，卽吸收作用与反常色散現象的眞实关系。在这些理論的前提中，眞实的事物是所有作者所共有的；这就是关于某物与某物間的关系之肯定，至于物的名称則随作者而异。

气体运动理論已惹起了不少的反駁，人們若在那里面自命看到絕对眞理，那就难于答复了。但这些反駁仍不妨碍那理論曾經是有益的，尤其是曾經使我們發覺了一种眞的关系，卽气体压力与滲透力的关系，倘若沒有这理論，我們便不会知道了。在这个意义上，人們可說它是眞实的。

当一位物理家發覺兩个相反而同样可貴的理論时，他有时会說：我們不必顧慮那个，虽然我們看不見这条鏈子的中間圈环，我們且緊握住其兩端。这位窘着的神学家的論据將很可笑，如果按照普通人的見解來說明物理的理論。当遇到矛盾的时候，則至少其中必有一理論是应該看作是錯誤的。倘若人們只为了尋求应該尋求的东西，那就不然了。也許每个理論所表达的都是眞实的关系，而其矛盾之处只在于我們用以穿着实在的影像。

对于覺得我們太限制学者研究范圍的人，我將答道：我們所禁止你們討論而你們有遺憾的这些問題不但是不可解决的，且是幻想而毫無意义的。

有的哲学家以为全部物理学都可用原子的相互碰撞的道理來說明。倘若他只要說在物理諸現象中，和在大数彈子的相撞中，有同样的关系，那再好沒有了，这是可以核驗的，这也許是眞实的。但他还要說另有一点意义；我們相信是懂得他的，因为他們相信是知道何为碰撞的本身；何則？簡單地为的是我們常常看过比賽彈子

遊戲。我們能否相信上帝看他的造化时，和我們看比賽彈子有同一的感想呢？倘若我們不願意对他的断語加以这种奇怪的意义，倘若我們又不願意我剛才所說明的且是好的那种狹义，那末这个断語便毫無意义了。

可見这一类的假設只有比喻的意义。学者对自己不当禁用它，正如詩人自己不禁比喻；但要知道它們的价値。为了满足理智，它們可能是有用的，而只要它們只是無关的假設，那就無害了。

这一番的討論，可以解答何以已被人們認为抛棄了的且为实験最后推翻了的某些理論竟驟然能死灰复燃重得新生。这是因为它們曾表达过眞实的关系；且当为了这个理由或那个理由我們曾經相信应該用別的言語表达同一的关系之时，那些理論一直是这样做过的。这样它們曾經保持了一种潛伏的生命。

在不滿15年前，那里还有比庫倫(Coulomb)所想出的液体再樸素而可笑的东西呢？但今天它又以电子的名义出現了。然則这些永久荷电的分子与庫倫的荷电分子，又有何区別？当然在那些电子中那电荷依賴一点物質作支撑，但这却是很微少的；換言之，它們有一質量(至今还有人反駁这話)；然而庫倫不是不給他的液体以質量；或者假使他不給与的話，这还是他引为遺憾的。至于說那电子之信仰不会再受腐蝕，这却是胆大的肯定；我們發覚这种意外的复兴，也是奇怪的事。

然而最可注意的例子，就是高罗(Carnot)原理。高氏以錯誤的假設为起点建立了这原理；当我們知道热不是不可熸滅的，而是能轉变成工作的，就完全抛棄了他的观念；其后，克魯秀士从事于此，才得最后之勝利。高氏原理在它的原始的形式下所表达的除了眞实的关系之外，还有不正确的关系，而这是旧思想之殘余；但

是这些后者的参加并不改变另一些的眞实。克氏只要撇开了它們，有如修剪枯枝一般。

其結果便是热力学的第二基本定律。这总是那些相同的关系；虽然这些关系至少在表面上，不再是在相同的事物間存在了。这对于保存那原理的价值已經够了。并且連高氏推理并不因此而消滅；这些推理又曾經适合于染有錯誤的問題；但是它們的形式（即其主要者）仍是正确的。

我剛才所說的，可以同时顯明普遍原理的作用，例如極小作用原理或能量守恒原理的作用。

这些原理有一極高的价值；这是人們在許多物理定律的陈述中尋求共同点时才得到的；所以它們代表着無数的观察的精髓。

但是，由它們的普遍性產生一个后果，这是我在第八章已提起了注意的，这就是它們不再能不被核驗了。我們旣不能給与能量以一个普遍的定义，能的守恒原理的意义只是說其中有些东西是不变的常数而已。所以無論將來实驗給我們什么世界的新概念，我們事先就确信其中必定有些东西是常定的，而我們名之曰能。

这样是不是說那原理毫無意义而化为一种重复語了呢？絕对不是的，它的意义是說凡我們所称为能的那些东西，都互相有一种眞正親屬的联絡；它肯定在它們之間有一实在的关系。但是如果这个原理有一个意义，这也許是錯的；也許我們無权去無窮地推廣它的应用，但就字的嚴格意思講來事先就保証它是可核驗的；然則我們怎能知道它在何时达到人們所能合法地給与它的一切推廣呢？这簡單地就是要等它对我們不再有用之时才行，有用就是說不遺誤我們而能使我們預測新的現象。在这种情形之下我們將可确信那肯定的关系不再是实在的了；否則，它將是很丰富的；实驗

不必直接与原理的一种新推廣有所矛盾，但也会把它推翻的。

物理学与力学——大半理論家对于借用力学或动力学的解釋常有一种偏愛。有些人只要能够把一切現象用按某定律相互吸引的分子运动來說明，就心滿意足。有些人就要求更大，他們想取消那种超距的吸引力；于是他們的分子的路徑是直綫的，非得受了冲击不会曲折。还有别的人，例如赫慈，他們取消那些力，但假定分子間有一种几何的联系，有如我們的关節系統；这样他們想把动力学变成一种运动学(cinématique)。

一句話，大家想把那自然界折成某种形式，除了这种形式以外，他們的理智是不会滿意的。那自然界对这事是否够柔軟呢？

我們在第十二章中談麦克斯韋理論时，將再討論这个問題。凡是能量守恒原理与極小作用原理滿足的时候，我們就可見其中不但总有一个力学的解釋的可能，并且可能有無窮的可能。利賴了戈立克思(Königs)先生一条很著名的关于关節系統(systèmes articulés)的定理，我們可以証明能以無窮的方式，用赫慈式的联系或用向心力來解釋一切。人們当然也容易証明用簡單的碰撞总可解釋一切。

为此，自然应該不以通常的物質为自滿，不以我們感官所接触到的而其动作为我們所直接观察的那种物質为自滿。或者人們可假定这个通常的物質是許多原子構成，而这些原子的內部动作不能讓我們知道，僅整体的移动为我們感官所能知道的。或者人們可幻想一些微妙的流体，叫它們以太也好，或别的名称也好，它們在物理学的理論中，歷來曾占一極重要的位置。

往往人們更進一步，把以太看成唯一的原始物質，甚至唯一的眞正物質。最持平的人把普通物質認为凝結的以太，这是毫無可

怪的;然而还有人更减輕它的作用,而只看做以太的奇点的几何軌跡。例如凱尔文(Lord Kelvin)以为我們所認为物質的不过是以太受有旋渦运动的地点而已;在黎曼(Riemann)看起來,这是以太常被消滅的地点;在比較最近的理論家,如魏舍(Wiechert)或劳莫(Larmor)看起來,这是以太受了一种非常特別的扭轉的地点。假使我們站在上面諸家的立場之一上面,我就要問人們有何权柄把在不过是假物質的通常物質上所观察到的力学特性推廣到以太上,而藉口以太是眞正物質。

当我們已知道热不是不可破坏的时候,就把古代的流体,热素,电等說一概拋去。然而这事还有別的理由。当我們把这些东西認为物質化时可以說就是着重了它們的个性,我們不啻在它們之間挖了一条深淵。等到人們对于自然界的統一性有了較深切的感覚,又看明所有联絡各部分的密切关系,这个深淵就要填塞了。当古代的物理学家增加了許多种的流体,不但創造一些不必要的东西,并且把眞正的联系也割断了。

凡一理論僅僅不肯定錯誤的关系是不够的,还要不遮蔽着眞正的关系才行。

至于我們的以太,实在有沒有呢?

人們知道以太的信仰从何而來。从远星射來的光綫需歷程数年才到达我們眼上,而当它旣已不在那顆星上,又尙未來到地球的时候总得有一个寄托的地方,可以說总有一个物質的支撑东西。

我們可把同样的观念更数学化地且更抽象地表达。我們所观察得的,是物質的分子所受到的变化;例如我們看見那照片上所受到現象的后果,实卽來于数年前那星球的焰燒。但是在普通的力学中,某系統之情态僅依存于其最近的先前情态;所以这系統滿足

微分方程式。反之，倘若我們不相信以太，則物質的宇宙狀态不但依存于最近的先前狀态，且亦依存于既往已久的狀态；于是这系統將滿足有限差的微分方程式。这是为要避免与力学的普遍定律相抵触之故，我們才發明了以太。

而这不过是迫使我們用以太來填滿星球間的眞空，但不是把以太滲入物質本身的中間去。費左(Fizeau)的实驗更進一步。用穿过流水或空气的光綫的干涉。費左的实驗似乎指示我們有互相滲透但相互移动的二种不同的媒質。人們竟如親歷其境地相信以太。

然而我們还可以想出一些使我們对于以太的感覺更为密切的試驗。假定牛頓原理，卽主动作用与反动作用相等性，如应用在單独的物質上就不确实，并且假定这是剛才我們所發覺的。于是加在一切物質分子上的力的几何的总和就非零了。如果我們不願改变全部力学，那就应該把以太加入，使得那物質似乎受到的作用被那物質对于某物所發的反作用所抵消。

又或我假定人們認識光与电的現象都受地球运动的影响。人們就要來結論这些現象不但可以告訴我們物質体的相对运动，并且可以使我們知道那些似乎眞实的絕对运动。这还是应該有以太，使得这些自命的絕对运动不是对着虛空的空間移动，而是对着具体的一种东西的移动。

这是人們永不会來到的嗎？我沒有这个希望，稍迟我將說出理由來，但这种希望不是太荒謬的，因为别人曾經有过。

例如，罗倫慈(Lorentz)的理論(这是我在第十三章中要仔細說的)，倘是眞实的，則牛頓定律將不适用于單独的物質，而其差别不难由实驗看出來。

另方面，人們对于地球运动的影响曾經做过很多的探討，結果总是否定的；然而我們所以从事这些实驗，正因我們事前对它就無把握，并且卽照一些盛行的理論补偿也許不过是近似的，而人們也許要等待精密的方法來給与肯定的結果。

我相信这样一个希望是虛幻的；而指出这种的成功將不曾啓示另一个新世界倒是令人稀奇的事。

現在讓我插几句别的話；事实上，我当說明，虽然有罗倫慈的学說，何以我不相信更精密的观察永不会顯明除了物質体間相对位移以外的东西。人們曾做过許多的实驗，以为它可以揭發第一級的数項；然而結果是否定的。这能是偶然的事么？这是沒有人承認过的；人們曾經尋找普遍的解釋，而罗倫慈找到了；他指明了第一級的数項自当消去的，而第二級的数項則不然。于是人們作了更精密的实驗，結果也是否定的。这也不是偶然的事，这是要解釋的；这人們也找到了，人們总是可以找到的；假設，这是最不缺少的基金。

然而这还不够；誰不覺得这还是把偶然的地位抬得太高了？設有某种情况恰巧消去这些第一級数項，又有某种大为不同，但也投机的别种情况，能消去第二級数項，那么这种造成这些情况的奇异的协作不也是偶然之事嗎？不然；我們对于这兩种，应当找出同一的解釋，于是自然使我們联想到这个解釋也必适合于更高級的数項，而这些数項的相互补偿將是嚴密而絕对的了。

科学的近狀——在物理学發展史中，人們可以分出兩种相反的趋势。一方面，在有些似乎应当永远分开的对象之間，可以随时發現新的关系；散乱的事实就不再各不相干了；它們有整理成为一种强大的綜合的傾向。科学走向統一和簡明的道路。

另方面，观察使我們天天知道許多新的現象；不过它們要長久等待着才能在科学中占个位置，而有时为要給它們一个位置，人們势必把整个建筑拆去一角。在那些已知道的現象本身中我們粗陋的感官原來使我們看到的是均匀，而往后我們就天天察見其中更多变化的細節；我們初以为簡單的又变为复雜了，而科学似乎走向变化与复雜的道路。

这兩种相反的趋势，有时此勝，有时彼勝，究竟結果是誰勝呢？倘若这是第一种勝了，則科学是可能的；然而这不能先驗地証实，并且人們可以考慮到虽然經过了徒然的費力想把那自然界勉强归入我們的統一的理想，但因我們的新發現日積月累，我們恐終于不勝其繁放棄了分类，拋棄了我們的理想，而把科学变为無数方術的記錄。

对于这問題，我們不能回答。我們所能做的，乃是观察今日的科学，而用它來比較昨日的科学。从这种考察，我們当然能够引出一些推測。

半世紀前，人們曾經抱有極大的希望。自从能量守恒原理及其各种变化發現后，我們才知道力之統一性。这样热之現象可用分子运动解釋。至于这些运动的性質，那时人們尙未十分确知；然而人們曾相信不久就可以知道了。关于光的問題，工作可說已完成了。至于电学則進步尙少。电学正与磁学联合起來。这是走向統一之路的一大步，这是最后的一步。然而电学本身怎样也將進入于普遍的統一，它將怎样并入万有的机構里，人們却还一点未想到过。但这种并縮之可能性，是誰也未怀疑过的，人們确曾有此信仰。最后，关于物質体的分子特性，則并縮更似容易；但一切細節那时还在模糊中。一句話，过去希望是廣大的，热烈的，但它却是

空洞的。

时至今日我們看見什么？

首先是第一个進步，長足的進步。光与电之关系現在是知道了；从前分开的光，电，磁，三个范圍現在合成一个了；而这种联合似乎已成定局。

然而得到这种的勝利，我們也着实有所牺牲。光学現象归入电学現象而成为一种特例；只要它們在孤立的时候，这是容易用人們自信为知道細節的运动來解释的，而这是極順利的；但是現在一种解釋如要可行，应当推之于全部的电学而适合。但这却不是容易做的。

我們所最滿意的，就是我們要在最后一章說到的罗倫慈理論，它用小的荷电体之运动說明电流；这当然是一种將已知的事实說得最透徹的理論，是一种把最多数的眞实关系顯明出來的理論，是一种人們在最后的建筑中所能找到得最多遺跡的理論。然而它还有我上面已指明的大缺点；它反对牛頓定律，卽主作用与反作用之相等性定律；或者在罗倫慈的看法，这原理是不能应用到單独的物質上的；要它成为眞实的，那就应該計及那以太对于物質的作用，以及物質对于以太的反作用。但除非有新局面，好像事情的經过不是这样的。

虽然，因靠着罗倫慈，那費左关于运动物体的光学研究的結果，正常色散与反常色散以及吸光諸定律，才互有联系，并与以太的其他特性联系，而这联系再也不会断的了。試看齐門(Zeeman)的新現象一來就很容易得到一个地位，并且它竟能帮助法拉第(Faraday)磁轉現象之分类，这是麦克斯韋費了許多工夫所沒有成功的；这样的容易，是以証明罗倫慈的理論并非一种預定消滅

的人为結合物。大約我們应当修改它,但不应消滅它。

然而罗倫茲的奢望,只是把运动物体的光学和电动力学結合起來;他并不想給它一种力学的解释。劳莫更進一步,他保守罗氏理論的精髓,而于其中加入麦克古拉(MacCullagh)对于以太运动的方向的观念,这可說有如接樹一般。他以为以太的速度与磁力有同一的方向和同一的数量。所以这个速度是我們所知道的,因为磁力是可以实驗的。这种尝試無論如何巧妙,罗氏的理論之缺点还是存在,并且加深了。主作用不等于反作用。依照罗氏,我們不知何为以太的运动;但由于这种無知,我們可以假定它在抵消了物質的运动中又恢复主作用与反作用的相等性。依照劳莫,我們知道以太的运动,而我們可以發覚这种抵消是沒有的。

如果照我的意思劳莫是失敗了,这是否說力学的解释就不可能呢?大为不然。我在上面已說过,凡現象一服从能量与極小作用兩原理,就有無窮的力学解释;所以光与电的現象也是如此。

然而这还不够,要使一个力学的解释是好的,那它就要簡明;而且为在一切可能的解释中选擇,我們除为了选擇的必要性之外,还要有別的原因。然而合乎这种条件因而有点用处的理論,我們却还沒有咧。我們应不应該埋怨呢?果眞这样,那就不啻忘記了我們追求的目的物了,我們的目的不是其中的机構,而眞实和唯一的目的就是統一。

所以我們应節制我們的奢望;不必去想什么力学的解释;我們限于指出假使我們願意的話,我們总可找到一种解释吧。对于这点我們已有成就;能量守恒原理,至今总是証实的;此外还加上第二原理,即極小作用原理,这原理已有合乎物理学的形式。它也是常常証实了的,这至少是关于那服从拉格朗日方程式(equations

de Lagrange)卽服从力学中最普遍的定律的可逆現象。

至于不可逆現象，就更不顺手了。然而它們还是有秩序而漸趋于統一的；这全靠高楼原理來照明它們。热力学从事于物体之膨脹及其变态的研究已很久了。近來它变成胆大起來而擴張其范圍。凡电池理論，热电現象之理論，都当归功于它；它在物理学中無处不有所开拓，且它对于化学也有所鑽研。处处流行同一的定律；处处在不同的表面下，我們找到高楼原理；处处也碰到这个熵(entropie)之不可思議的抽象概念，这个概念与能的概念有同等的普遍性，而且也似乎同它一样遮盖着一种实在。輻射热現象从前似乎不能用热力学來說明；然而新近我們已見到它归于同一的定律下了。

从此我們又發覺了許多新的相似点，以至于細節地方也有相似；欧姆的电阻有似液体的粘滯性；磁化滯后現象(l'hystérésis)倒像固体的摩擦。在任何情形中，摩擦似乎是各种不同的不可逆現象之模型，而这种親屬关系是实在而深远的。

人們也曾找过这些現象的一种純粹力学的解釋。这是不容易找的。要找到它們就得假定那种不可逆現象不过是表面的，而基本現象是可逆的，并且服从动力学已知的定律。然而基本的东西甚多，且漸相混合，所以在我們粗陋的眼光看來，似乎都是傾向均匀的，就是說都向同一的方向前進，沒有回头的希望。因此表面的不可逆現象只不过是大数定律的效果。唯有一种感官是無窮的灵敏的生物，有如麥克斯韋理想的魔鬼，可能解开这束乱絲，而引世界后退。

为了这个有关于气体运动之理論的概念却費了極大的力，而总还是不大丰富的；但它將來可以成为丰富的。这里不是要審查它会不会引起矛盾來，和是否合乎事物的眞正性質。

虽然，我們且把顧衣(Gouy)先生对于布朗运动(mouvement brownien)的新奇的观念說一說。照这个学者的說法，这个奇异的运动不合乎高楼原理。那些他使它震动的分子就比那很緊密的乱絲網孔还細小；所以它們有可能去分解这乱絲，而因此能使世界逆行。我們將以为这是麥克斯韋的魔鬼在作怪呢。

綜而言之，旧时已知的现象分类得逐漸好了；但新的现象也來要它們的位置；其中大半，有如齐門现象，一來就得到了。

然而我們还有陰極射綫，x 射綫，鈾和鐳的射綫。这里別有一世界，是誰也沒有想到过的。因此正不知还要安插多少不速之客哩！

現在誰也不能預料它們將有何等的位置。但是我不相信它們要消滅这普遍的統一，我还是相信它們將有补足这統一。事实上，一方面新的射綫似与發光現象(luminescence)相关連；它們不特可以激發熒光現象(fluorescence)，并且有时它們發生的情形与它相同。

它們与那受紫外光激起火花的原因也不是沒有親屬关系的。

最后，而最重要的，人們相信在这些現象中找到一种活动的眞正电离子，其速度之强大比在电解液中的实在有天壤之別。

这些都是很空泛的，但將來都会明确的。

燐光現象，光对于电花的作用，这些都曾經是較为偏僻的領域，因此曾被学者所偏棄。現在人們可希望去造一条新路綫，使它們与普遍科学的交通更加便利。

不但我們將發現新的現象，且在我們曾信为知道的現象中，又顯露意外的景象。在自由的以太中，一切定律都保存它們庄嚴的簡明性；但眞正的物質似乎漸形复雜；凡是人們对它所說的，永远

不过是近似的，而时时刻刻我們的公式需要新的数項。

虽然，那些框子并未折断；在我們曾信为簡明的对象中所存在的那些为我們已經認識的关系，当我們知道它們的复雜性时，还是在这些同一的对象中存在着，而要緊的只是这事。我們的方程式愈形繁复，使得与自然界的繁复愈加接近，这是实在的；但关于相互推導这些方程式的关系式却絲毫沒有变易。一句話，就是这些方程式的形式还是支持着。

我們就以弗勒納尔(Fresnel)关于反射定律作例罢，弗氏曾用一个簡明而引入的理論來建立的，且似乎得着实驗上証实的。此后，更精确的研究已經肯定这种的証实不过是近似的而已；它們处处表示有橢圓偏振現象。然而利賴了第一次近似理論，人們曾馬上找到这种反常現象的原因，这就是其中有一通过層；而弗氏理論的精髓照常存在。

不过人們不得不有一种迴想：就是如果人們起初就怀疑这些关系所联系的对象的复雜性，则一切这些的关系將依然不会被發現的了。久已有人說：如果狄哥有十倍精确的天文仪器，則永不会有凱普勒，牛頓和天文学。一种科学產生得太迟，而观察的方法已太完善，就是一件不幸之事。今日的物理化学就是如此；它的創立者在他們的展望中往往被阻于第三位和第四位小数；所幸的，这些人都有一种坚强的信仰。

当人們对于物質的特性逐漸弄明白时，就看見其中有一种連續性。自从安得來斯(Andrews)与王德耳瓦耳斯(Van del Wals)的研究結果發表之后，人們才明白了液体变成气体的經过情况，并且知道这种过程不是驟然的。同样在液体与固体兩种狀态之間，也沒有什么深淵，又在新近的一个会議中我們同时見到了关于液

体刚性和关于固体流动的論文。

在这种趋势之下，簡明性的丧失是無疑的；某种現象从前是用許多直綫表示的：要用或多或少复雜的曲綫把这些直綫連合起來。在另一方面，这里面統一性却比較好了。这些范疇分淸之后，使人們的精神能得安息，但它們还是不足以使人滿足。

最后，物理的方法已經擴張到一个新的領域內，此卽化学；物理化学因此產生。这門学問現在还在幼稚时代，然而它已能使我們把許多現象联系起來，例如：电解、滲透作用以及电离子运动。

从这样短促的叙述中，我們得到什么結論呢？

統而言之，我們已是近于統一了，人們所取的步驟，并未如五十年前所希望的那般迅速，我們沒有取預定的路徑；然而，最后人們却开拓了許多地域。

第十一章　概率計算

在这个地方，忽然來說概率計算，我想人們一定是詫异的。它与物理科学的方法又有何关呢？

但是我所要举出而不去解决的問題，自然是对研究物理的哲学家所要提出討論的。

为了这个观点，所以在前二章中，我常常用过概率和偶然这些字眼。我上面曾經說过：“一切預見的事实只是大概的。一种預見無論如何穩固，我們决不能絕对确信它不致被实驗所推翻。然而这概率往往是很大的，以致我們在实用上能够滿意。”

其后我又說过：

“我們且看那簡明之信仰，在我們的推廣理論中，有何作用。在

許多特例中，我們曾將簡明的定律核驗，而我們对于这样一再重見的巧合，决不承認是一种偶然的事。”

所以在許多情况中，物理家的地位有如賭博者，只盼望幸运。凡是他們用归納法推理的时候，他們多少有意識地用概率來計算。

因此我不得不插入一句話，而打断我們的物理科学方法之討論，來詳細考察这种計算的价值和它值得信任的程度。

單看概率計算这个名詞已屬謬語，大概是确实的反面，是人們所不知道的，旣是不知道的，又如何去計算呢？但是許多高明的学者却已經从事过这种計算，而我們决不能否認科学已从此中獲得若干益处的。这表面上的矛盾，怎样解釋呢？

概率这个名詞已有人下过定义否？到底它可不可定义呢？假使不能的話，那么我們怎敢去用它推理呢？人們將說，这个定义是很簡單的：一件事情的概率即对此事順利發生情形的数目与其可能發生情形的总数之比率。

試举一簡例，便可見这定义之不完全了。我試擲二骰；为要二枚中至少有一个顯出六点的概率是若干？每骰可顯出六种不同的点：可能情形之数为 $6\times6=36$，順利情形之数为 11；概率为 $\frac{11}{36}$。

这个答案是不錯的。然而我豈不可說：兩骰所顯出的点子可成 $\frac{6\times7}{2}=21$ 不同的組合？在这些組合中，6 个是順利的；概率为 $\frac{6}{21}$。

何以計算可能情形的第一式要比第二式合法呢？無論如何，这不是我們的定义可告訴我們的。

所以我們只好补充这定义，在“……与其可能發生情形的总数之比率”一句下增加一句：“只要这些情形是同样大概的”。这样我

們变成用大概來規定大概了。

我們怎样知道兩件可能的情狀是同样的大概呢？这难道是根据一种公約嗎？我們如果在每一問題之起首用一种表明的公約，那就一切順利，我們只要应用算術与代数的規則就可以一直算到底，所得的結果，不致有怀疑的余地；但是一到我們要稍稍应用它的时候，則我們必須証明这个公約是合法的，于是我們又將遇到我們以为已經巧避的困难了。

会有人說，用我們的常識就可以知道須做何种公約么？唉！白潭(M. Bertrand)先生曾經为了好玩而演算一簡明的題目："如要在一圓周中作一弦比內接正三角形之边为長，則其概率为何？"这位著名几何学家曾依次用兩个都合乎常識的公約，于是得了兩个不同的結果，一为 $\frac{1}{2}$，一为 $\frac{1}{3}$。

由此以观，則概率計算簡直是一种空虛的科学，我們再也不可相信这种不清不楚的本能，所謂常識，而我們从前还要借以糾正我們的公約哩。

然而对于这种結論，我們也不能贊同。这种不清不楚的本能是我們所不可少的；沒有它則科学將为不可能，沒有它我們將既不能發現定律，又不能应用定律。譬如，我們可以陈述牛頓定律嗎？这是無疑的，因为有許多的观察都能与它符合；但这里不是偶然性的簡單效果么？况且我們虽然知道这定律許多世紀以來已眞了，又怎么知道它明年还是眞的呢？对于这个疑問你一点也不会回答，除非說："这个概率是很小的"。

但我們姑且承認这定律吧；靠着它，我想能够計算一年后木星之所在。然而我有这权嗎？誰敢說一个帶着極大速度的極大的物質就不会走近太陽系范圍而發生一种不可預見的擾乱呢？講到此

地,又是無可回答了,除非說:“这个概率是很小的”。

照这一看,所有科学不过是一种無意識的概率計算之应用;所以破坏这种計算不啻破坏整个科学。

在有些科学問題中,要引用概率計算是比較顯然的,对这些問題我不預备多說了。第一譬如在内插法中已知一函数之一些値,人們要去猜夺其中間的値。

我还要举个例:卽那著名的观察誤差理論,这是我以后还要談及的,气体运动理論,这个知名的假設是假定某一气体分子可运行極复雜的軌道,但因大数的效果,故唯一可观察的平均現象服从簡明的定律,卽馬略特与蓋呂薩克(Gay-Lussac)定律。

所有这些理論都是根据大数定律而來,所以概率計算顯然会打倒它們的。它們确是只有一种特别的利益,而除了关于内插法外,这都是些犧牲,对于这些犧牲人們是可以忍受的。

但是我上面已經說过,这还不僅是这些部分的犧牲有关,而是关于整个科学的合法性將發生疑問了。

我知道有人一定要說:“我們是無知者,但我們应該行动。为要行动,就無暇去做詳密調查的功夫,來解除我們的無知;况且,这样的調查,要花費無窮的时間才行。所以我們在未知前就应該决定,我們要靠运气而行事,而且按照規則,但也不必信之太甚。我所知道的并不是說某事是眞的,不过在我認为最好的办法,还是当它是眞的做去”。然則概率計算,因而科学只有实用的价値了。

不幸困难不是这样可以打消的。今設有一賭博者要下手,他請我指教。如果我答应了他,則我將根据概率計算,但我不能担保他成功。这就是我所謂主观的概率。关于这一層,人們或可满意我剛才所說的。但我假定有一旁观者專記每局的結果,而且这賭

博的时間又很長；則末了看他的記錄之时，結果必合乎概率計算，这就是我所謂客观的概率，而正是这个現象有待解釋的。

現在有許多保險公司应用概率計算，且他們能分配于股东以紅利，这紅利的客观实在性，是無可非議的。拿我們的無知与行动的需要性來解釋这事，这是不够的。

所以絕对怀疑是不能成立的；我們应当謹慎，但我們不能作籠統的攻击，一定要經一番討論才行。

一、概率問題之分类——关于概率的問題之分类，我們可有好几种看法，第一根据普遍性。在上面我已說过：概率者，乃順利情形之数与可能情形之数之比。因为沒有較妥的名詞，我所命名的普遍，將与可能情形之数并進。此数可以是有限的；例如一局骰子之可能情形的数为三十六。这是第一級的普遍性。

但是，譬如我們問在圓周內之一点能在此圓的內接正方形中的概率如何，則圓中有多少点便有多少可能情形，意卽有無窮数。这是第二級的普遍性。普遍性还可加以擴張：我們可以問，如欲某函数滿足某一給定条件，則此概率若何；于是我們能想出多少不同的函数就有多少可能的情形。这是第三級的普遍性，譬如，当我們根据有限数的观察而猜想概率最大的定律之时，我們就升上这級了。

我們可站在完全不同的观点。如果我們不是無知，那就沒有概率，而只有讓位于确定了；但是我們的無知不能是絕对的，否則也將沒有概率了，因为就是要达到这种不确定的科学，还得要借点光明才行。所以概率問題可視此种無知程度之深淺而分类。

在数学中，已經可提出概率問題。如在对数表中任意找一对数之第五位小数为9时，此概率若何？我們一定不迟疑地答道，这

是 $\frac{1}{10}$。此地我們具有此題所应有之数据；我們不用表就可計算对数；但我們不願費这种力。这就是第一級的無知。

在物理学中，我們的無知是更大了。一系統在某时之情态依存于二事：它的初时情态和这情态变化定律。这兩样事情我們如果都知道了，我們將只剩数学問題待解决，而我們又將落在第一級的不知上面了。

但人們往往知道定律，而不知初时情态。譬如有人問現在小行星之分布如何；我們知道自古以來它們是受凱普勒定律支配的，但我們不知道它們在初时分布如何。

在气体运动中，人們假定气体的分子走直綫軌道，并且服从兩彈性物体碰撞定律；但因不知道它們的初时速度，故其現在速度亦無从得知。

唯独概率計算可以預測平均現象，而來于这些速度所組成。这是第二級的無知。

最后，不但初时的条件，并且定律本身，都可能不知；于是人們到达第三級的不知，而一般我們对于一現象的概率再也不能有絲毫的肯定了。

往往人們不是根据多少不完全的定律知識以預測一事端，而是先知事端，再猜測其定律；不是由因求果，而是由果求因。这叫作原因之概率問題，这些問題对于科学上之应用要算最有趣的了。

今如我和一位我知道他極誠实的人玩紙牌遊戲（jeu d'écarté），他將出牌，当他翻出的牌是王，則此概率如何？这是 $\frac{1}{8}$；这是效果概率問題。我和一位不相熟的人作同样的遊戲，他翻了 10 次牌，其中 6 次是王；假使我的遊伴是騙子，則此概率又將如何？这是原因概率問題。

我們可說这是实驗方法的主要問題。我已观察得 x 的 n 个值，和 y 所有相应的各值；我已發覚后者与前者之比顯然为常数。这就是一件事端，試問其原因何在？

这大概是不是一种普遍的定律，根据这定律 y 与 x 成正比例，而其中小小的差別是由于观察之錯誤？这是我們研究科学时不断地提出的一种問題，而是人們在研究科学时不知不覚地解决了。

我現在且把这些不同类的問題提出討論，我先討論主观的概率，次討論客观的概率，这些都是我上面定过的名詞。

二、在数学科学中的概率——自 1883 年以來，圓求方問題之不可能是已經証明的了；但在这很久以前許多几何家以为这个不可能性实在是十分“大概的”，所以科学院不經審查就丟棄那些可憐的瘋子每年送去的論文，呵，那些論文眞是太多了。

試問学院做錯了嗎？自然不是，因为它知道这样做并不会埋沒一种眞正的發現。它当时虽未能自辯；但它深知道它的本能决不会欺騙它的。如果你要問这学院里的院士，他們一定答道：“我們曾比較，是一位無名的学者能解决久想解决而未果的問題之概率为大，还是地球上又多了一个瘋子的概率为大；我們覚得这后者的概率似乎較大。”这是很好的理由，但毫無数学的性質，这純粹是心理的。

又如你再追問他一句，他又將說：“你何以要一超越函数的特殊值为代数的数；又如 π 为某代数方程式之根，你何以要它是函数 $\sin 2x$ 的週期而同一方程式的其余的根則又不然呢？”总之，他們想引用一种在最空泛形式下的充足理由律。

然他們从中可得着什么？頂多不过一个利用他們时間的規則，与其把时間用來看那种早为他們所不信任而枉費心血的書，不如

把时間用在普通的工作上为有益。但我上面所謂客观的概率与此第一題毫無关系。

至于第二題則不然。

例如我有一本对数表，在起首 10,000 对数中随意取一个要它的第三小数为偶数，則此概率为何？你一定不迟疑地回答这是$\frac{1}{2}$，事实上，你如把表中这些 10,000 个数目的第三位小数一个个寫出來，你將一定見到偶数之数与奇数之数差不多相等。

如果人們願意的話，現在把相应于 10,000 个对数的 10,000 数寫下來；如果对数的第三位小数为偶数，則每数为 +1，反之則为 −1。然后將这些 10,000 数平均。

我將不迟疑地說：这 10,000 数的平均数大概是零，并且我如果实在去計算它，我將証驗这数目一定是很小的。

但这种核驗也是無益的。我本可証明这平均数小于 0.003。为建立这个結果，那就要用很長的演算，此地篇幅是太小了，因此我只好引証我在 1899 年 4 月 15 号出版的“普通科学雜誌”內所登之一文供讀者参考。我所要使人注意的唯一点就是：在这演算中，我只需要二事为根据，卽对数的第一次導数与第二次導数在所考慮的間隔內，仍旧是包含在某定限中。

由此得第一后果，卽此特性不僅对于对数为眞，且对于任何連續函数亦然，因为凡是連續函数的導数都是有限的。

我所以能預先确知結果，第一，是因为我对別的函数已常常观察过相似的事实；其次，因为我在內心里总做了些多少是無意識的而不完善的推理，这种推理曾引我到前面的不等式，有如一位演算的能手，他在未算完乘法以前，早已知道“大約若干”了。

况且，我所謂我的直觉，既然只不过是一种眞正推理的不完全

的視察，人們便可說明观察何以会証实我的預見，又何以客观的概率与主观的概率会相符合。

今再选下題作为第三例：u 是一任意数，n 是一極大的給定的整数；則 $\sin nu$ 的大概值为何？这个題目本身是毫無意思的。如欲給它一个，就要一公約；我們試公認 u 介于 a 与 $a+da$ 之間的概率是 $\varphi(a)da$；因此概率与無窮小的間隔 da 之廣延成比例，而等于此廣延乘那僅依存于 a 的函数 $\varphi(a)$。至于此函数我可任意擇定，但是必需假定它是連續的才行。$\sin nu$ 之值在 u 增加 2π 时旣不变，我就可以不去限制普遍性而假定 u 介于 o 与 2π 之間，因此我就要假定 $\varphi(a)$ 是週期函数，其週期是 2π。

我們要找的大概值可用單積分容易地表达，且很易証明这積分是小于 $\frac{2\pi M_k}{n^k}$。

M_k 是 $\varphi(u)$ 的第 k 次導数的最大值。所以人們可見，如第 k 次導数是有限的，則我們的大概值，当 n 無限地增大时，將漸趋于零，且較 $\frac{1}{n^{k-1}}$ 之趋于零为快。

故 n 極大时，$\sin nu$ 的大概值为零；为要規定此值，我曾求助于公約；但無論此公約如何，結果总是一样的。当我假定了函数 $\varphi(a)$ 是連續而週期的，我只受了很小的約束，且这些假設是这样自然，以致我們自問怎能避免它。

把前面各方面都很不同的三个例子審察了之后，我們一方面已經窺見哲学家所謂充足理由律的作用何在，他方面，有些特性是为一切連續函数所公有的，这是件重要的事实。在物理科学中研究概率將引致我們得到同一的結果。

三、在物理学中的概率——現在我們來到关于上面所說的第二級的無知的問題了；这就是那些人們知其定律而不知其系統初

时狀态的題目。我尽可多举些例子，但我只要举一个：在十二宫(zodiaque)上小行星現在大概的分布如何？

我們相信它們是服从凱伯勒定律的；我們不变易此題之性質，甚至可假定它們的軌道都是圓的，都在同一平面，而为我們所知道的。反之，我們完全不知它們初时的分布如何。但是我們可不迟疑地肯定今日这种分布是均匀的。何故？

設 b 为一小行星在初时卽在零时之經度，設 a 为其平均运动；則其在現时，卽在 t 时之經度当为 $at+b$。如說現时之分布为均匀的，这就是說以 $at+b$ 的倍数为角度的正弦和余弦之平均数为零。我們何以做此肯定？

試以平面上之一点代表每一小行星，卽此点之坐标适为 a 与 b。这些表示点將包含于平面上某定范圍內，但点数旣多，这范圍便好像撒滿了点子一般。其实我們絲毫不知道它們的分布法。

对于这种問題人們要应用概率計算时，怎样做呢？如要一个或多数表示点是在平面中某定部分，此概率为何？当我們無知的时候，我們只好作一任意的假設。为要使人明白此假設的性質，請讓我与其用数学的公式，不如用一粗淺而具体的形象來說。我們試想像在此平面上鋪有一种幻想的物質，其密度是可变的，但是連續变动的。于是我們約定說，那些在平面上某部分的点子的大概数目与那理想的物質之数量成比例。于是人們如有平面上兩相等的部分，則我們的小行星的表示点在此一部分或在彼一部分之概率之比將等于此幻想物質之平均密度在此兩相应部分之比。

所以这里有了兩种的分布，一种是眞的，其中表示点是很多的，很挤的，但有如在原子假設中物質的分子之分布，都是散离的；一种是离开实际的，其中表示点是以幻想的連續物質代替的。我們

知道这后者不是实在的，但是我們的無知逼使我們去采用它。

我們如还有点关于表示点的实在的分布的观念，則我們便可安排得，使在某定廣延的部分內此幻想的連續物質之密度大約可与表示点之数成比例，这些点可說就是包含在这范圍內的原子。其实这也是不可能的，而我們的無知实在太大了，以致我們势必任意揀一函数，以規定我們的幻想物質的密度。我們只受一种不可避免的假設之限制，我們假定这函数是連續的。这样已足使我們得一結論，我們且看罢。

在 t 时，那些小行星之大概的分布如何？或者，在 t 时，徑度正弦卽 $\sin(at+b)$ 之大概值为何？起初我們曾作一任意的公約，但我們如采用它，則此大概值是完全定当了。今將平面划分为元面積。考慮 $\sin(at+b)$ 在每元面積中心之値；將此值乘此元面積和幻想物質的相应的密度；然后再对所有元面積積分。照定义，这总合卽所求之大概的平均值，它是用重積分表示的。

人們或以为这平均数由函数 φ 而定，这函数規定幻想物質的密度，而 φ 既是任意的，那么随着我們任意的选擇，我們將得任何的平均值。这却是絕对不然的。

用一簡明的計算可以証明这重積分，当 t 增加时，却遞減得極速。

因此，我不知道究竟对于初时的某种或某种的分布問題应該做什么假設才好；但是無論用何种假設，其結果总是一样的，就是这样我才解决了疑难。

無論函数 φ 是什么，当 t 增加时，其平均値漸趋于零，且因那些小行星必已完成了極多次数之旋轉，所以我能肯定这平均值必定很小。

我可随意选擇 φ，但是有一种限制：就是这函数应当是連續的；事实上，就主观的概率而論，如选了一种不連續的函数，未免不合理；例如我如假定初时的徑度正为 $0°$，而不能在 $0°$ 与 $1°$ 之中，其理由何在？

但是如果就客观的概率而論，如果我們从理想的分布（那里理想的物質已假定为連續的）來到眞实的分布（那里我們的表示点有如散离的原子），則困难又生。

$\sin(at+b)$之平均值簡直可用下式表之：

$$\frac{1}{n}\Sigma\sin(at+b),$$

其中 n 表示小行星之数。我們所有的已非一連續函数的重積分，而是断續的数項之和数。然而竟無人会眞切地疑惑这平均值实在是極小的。

此因我們的表示点旣極拥挤，我們这断續的数項之和数与積分相差一般也是很少的。

一積分乃一些数項之和在数項增至無窮时所趋向之限值。如数項極多，則和数与其限値相差極少，卽与積分相差極少，而我关于積分所已說的話仍然适合于此和数。

但也有例外，例如如果对于一切小行星：

$$b=\frac{\pi}{2}-at。$$

在 t 时所有一切行星之經度將为 $\frac{\pi}{2}$，而平均值当然將等于 1。为此，則在 0 时，所有小行星都应該放在一种特別形而緊密的螺旋綫上。大家將以为这种初时的分布是未必有的（就是假定它实現了，但在現世代，譬如 1900 年一月一日，其散布必不均匀，数年后才可均匀）。

然而我們为什么断定这初时的分布是未必有的呢？这是要解釋的，因为我們倘若沒有理由舍去这个荒謬的設想，認为不确实，那就一切都会傾倒了，而我們再也不能絲毫肯定現时的某某分布的概率是如何了。

我們要援引的，仍是充足理由律，这是常常要回顧到的。我們可以假設行星初时分散得彷彿成一直綫；且亦可以假定行星不是整齐的分布；但是我們覚得好像無充足理由能使那產生它們而未知的原因去依着一条很整齐但很复雜的曲綫而动作，并且好像特意选擇这曲綫而使得現在的分布是不均勻的。

四、紅与黑——为那些偶然的遊戲所引起的問題，例如轉盤賭(roulette)，其实与我剛才所談的完全相似。

譬如在圓面上分成極多的相等部分，并塗以紅黑相間的二色；用力將指針旋轉，在經过很多数的圈子之后，它停在某分格。欲此分格为紅，則其概率当然为$\frac{1}{2}$。

今設指針的旋轉角度为θ，且包含几个圓周；我如用力旋轉此針使它停在θ与$\theta+d\theta$之間，則不知概率为何；但是，我可做一公約；假定此概率为$\varphi(\theta)d\theta$；至于函数$\varphi(\theta)$我完全可以任意选擇；絕对沒有什么可以指導我选擇；但是我却自然地会假定这函数是連續的。

設ε为每紅分格或黑分格之長度(在半徑为1之圓周上計算)。

应該計算$\varphi(\theta)d\theta$的積分，一方面把它普及于所有的紅分格，另方面普及于所有的黑分格，而比較其結果。

我們試認定一間隔2ε內含一紅分格和它相繼的黑分格。設M与m是$\varphi(\theta)$在此間隔中的極大与極小值。普及于所有紅分格之積分將小于$\Sigma M\varepsilon$；普及于所有黑分格之積分將大于$\Sigma m\varepsilon$；故其

相差將小于$M(M-m)\varepsilon$。但是，如函数φ是假定連續的；又如ε对于指針所轉之全角度为很小，則$M-m$之差数將为很小。故二積分之相差很小，其概率將近于$\frac{1}{2}$。

人們可明白，我虽不知道函数φ为何，我应該將概率当作$\frac{1}{2}$做去。另方面，人們可以解釋何以我从客观的观点上，我观察得若干次局数，这观察的結果是紅的次数大約等于黑的次数。

凡賭博家都知道这客观的定律；但这定律却把他們陷于錯誤中；这錯誤虽經屡次提出，然他們仍旧常常墜落其中。如果紅色連接出了六次，他們以为放在黑的上，一定靠得着；因为他們說：紅色連出七次，这是很少的。

实际上，他們獲勝的概率还是$\frac{1}{2}$。在观察上，实在連出七次紅色是很少的，但六次紅一次黑也是很少的呵。他們已注意了七次紅是很罕有的；他們所以不能注意六次紅一次黑也是罕有的緣故，这完全是因为这种情形很少引起注意。

五、原因的概率——我現在來談原因的概率問題，这是在科学应用一方面最重要的問題。例如：有兩顆星在天球上是很接近的；这种表面上的接近是否純粹偶然的效果，而这兩顆星虽似在同一的視綫上，然与地球的距离是否相差甚大，因而彼此相距离甚远呢？或者这是实在的接近嗎？这就是原因的概率問題。

我首先要追憶在迄今所談的效果的概率的諸問題时，在起初我們总要安置一种多少是合理的公約。假使說在某种尺度下，結果总是不依存于这公約，这只因为某种假設的条件使我們先驗地舍去好比不連續的函数，或某种荒謬的公約。

我們研究原因的概率时，我們又可見到一些相似的东西。一种效果可由A原因或B原因所產生。今效果旣已發生；人們要問

这是由于 A 原因的概率为何；这是后驗的原因的概率。但是如果沒有多少是合理的公約預先告訴我 A 原因之先驗的概率，那我就不能計算它了；我所要說的概率是指对于尙未观察其效果的人而言的事端的概率。

为更明白起見，我再举前面說过的那种紙牌戲(jeu d'écarté)为例；我的对手先动而所翻出的是王；如果这是希臘人，則其概率为何？依普通的公式求得，这是 $\frac{8}{9}$，这个結果当然是很可怪的。我們如再加以考察，將可看見，我們做这样的計算，好像在未坐在桌子旁边以前，我已認为在兩分中已有一分認为我的对手是不規矩的。这是荒謬的假設，因为如有这心理我一定不会和他玩了；故此結論之謬誤亦卽在此。

关于先驗的概率之公約已經不合理了；因此后驗的(à posteriori)概率計算把我引到一个不可容許的結果。由此可見这預定的公約之重要性；我还可补充說，倘若不做一点这种公約，則后驗的概率問題將毫無意义；故总要明白的或暗示的去做它才行。

現在再举一个更合乎科学的例子。我想确定一实驗的定律；此定律待我知道之后，就可用曲綫來表示；我做了若干次孤立的观察；每一观察可用一点表示。我得了这些不同的点之后，便用曲綫穿过它們，使不致与各点相距太远，并須保持此綫的整齐形狀，沒有角点，沒有太急的曲折，沒有曲率半徑太急的变化。此曲綫可表出一个大概的定律，我承認它不但能使我知道已經观察过的函数数值的中間数值，而且还能使我知道那些观察得的数值之本身，比直接的观察更为正确（因此我將曲綫貼近这些点子而通过，并非經过这些点子的本身）。

这是一个原因概率的問題。那些效果卽我所記錄下來的量度；

它們依存于兩种原因的組合：現象之眞正定律与观察之誤差。知道了效果，尙須尋求使現象服从某定律之概率，以及使观察沾染某种誤差之概率。于是概率最大的定律相应于所画的曲綫，而一种观察的概率最大的誤差卽以此相应点与曲綫的距离表出。

但是，在一切观察以前，我如对于某定律之概率以及我万一的誤差之概率沒有先驗的概念，則此題將毫無意义。

如果我的仪器是好的（这是我在未观察以前已經知道的了），我就不会使我的曲綫与实驗上直接得來的标点相离太远。如果这些仪器不好，我可以稍为离远一些，冀得一屈折較少的曲綫；这样，那曲綫之整齐形狀就多牺牲一些了。

我为什么要想法画一沒有屈折的曲綫呢？此因我先驗的就認定为連續函数所表示的定律（或以高次導数是很小的函数表示），比之不合此种条件的定律的概率較大。如無此种信仰，我們現在所談的問題將毫無意义；內插法也將是不可能了；人們决不能从有限的观察中推出一种定律；科学將不能成立了。

五十年前，物理学家認为在同样的情况中，簡明的定律总比复雜的定律为可靠。他們甚至引借这个原則來袒护馬略特定律，反攻侯洛尔（Regnault）的試驗。現在他們排斥了这种的信仰；但是有多少次，他們不是仍旧好像被迫要奉守那信仰做去嗎！虽然，这个傾向所余的就是連續性之信仰，而我們剛才已見过，如果輪到这个信仰也有消滅的一天，則实驗科学將成为不可能了。

六、誤差理論——因此我們就被引導來談关于誤差的理論，这理論与原因的概率問題直接相关。这里我們仍是察見一些效果，此卽若干不相調和的观察，而我們想法去揣度其原因，这些原因，一方面是被測量的量之眞值，另方面是每一孤立的观察中所做的

誤差。应当計算每一誤差之后驗的大概数量，以及須要測量的量的大概值。

但是，照我剛才所已經說明的，如果人們不先驗地(卽在一切觀察以前)承認一种誤差的概率定律，則这計算是不能做的。誤差定律有沒有呢？

凡計算家所承認的誤差定律就是哥斯(Gauss)定律，它是用一超越曲綫表示的，名曰"鐘形曲綫"。

先且照古典方法区別系統誤差(erreur systematique)和偶然誤差(erreur accidentelle)。我們如果用太長的米达尺量一長度，我們結果所得的数总是太小，虽經数次測量，然这終是無用的；这就是系統誤差。我們如用一精密的尺測量，虽然我們也能量錯，但是有时我們錯的多，有时錯的少，苟經多次測量之后，試求其平均数，則錯誤漸消。这是偶然誤差。

系統誤差不能滿足哥斯定律是顯然的；但是偶然誤差能滿足它嗎？人們早已試做过許多的証明；而大概都是些粗陋的誤解。但是人們仍可根据下述的假設以証明哥斯定律：所犯的誤差乃是許多部分的与各自独立的誤差組合而成；每一部分的誤差是很小的，并服从一条任何概率定律，但一个正号的誤差之概率和一个相等而記号相反的誤差之概率是同样的。自然这些条件往往可以滿足的，但并非永是如此，对于滿足这些条件的錯誤，我們就可名之曰偶然的。

人們可見最小二乘方法(la méthode des moindres carrés)不是在一切情况中都是合法的；一般物理学家还比天文家更看輕它。这一定由于天文家除遇有如物理学家的系統錯誤之外，还要向一种極重要的誤差之原因斗爭，而这完全是偶然的誤差；我要說

的是大气的波动。所以听一位物理家和一位天文家討論某观察方法，那是很奇怪的。物理家因确信一次好的測量勝过許多次不好的，故竭力小心以消除最后的系統誤差为前提，而天文家回答道："但是你这样只能观察極少数的星；偶然誤差还是不会消滅的"。

我們的結論应該如何？是否应該繼續应用最小二乘方法呢？我們应当区别：我們已把所能怀疑的一切系統誤差都消去了；我們固然知道还有，不过我們不能發現它們；但是我們应当打定主意，而采用一个确定的数值，認为大概的数值；为此我們最好的做法顯然就是应用哥斯方法。我們所应用的只是关于主观的概率的实用規則。这是沒有什么可說的。

但是人們还想進一步，并且不特肯定大概数值是若干，并且肯定結果中所犯的大概誤差是若干。这是絕对不合法的；要这是眞实的除非我們确知那些系統錯誤都已經消去了，但这是我們所絕对不得而知的。我們有兩系列观察；应用最小二乘方法时，我們觉得第一系列的大概誤差比第二系列的小兩倍。但是第二系列可能比第一系列的好，因为第一系列可能沾染着很大的系統誤差。我們所能說的，便是第一系列大概勝于第二系列的，因为它的偶然誤差較弱，并且我們毫無理由去肯定，系統誤差在这一系列中比另一系列为大，关于这層，我們絕对是不知道的。

七、結論——在前文中我提出了許多的問題，可是一个都沒有解决。但是我并不懊悔把它們寫了出來，因为这也許能引起讀者对这些难題有所迴思。

虽然这样，其中有些地方似乎是樹立得很好的了。为要作某种概率計算，甚至要使这計算有一个意义，那末就应該以承認一种假設或是常常略含任意性的公約为起点。选擇这种公約时，我們

只能以充足理由律为嚮導。

不幸这个原则是很空泛的，并且是很有伸縮性的，而在我們方才很快的考察中，已見过它有各种不同的形式了。最常見的形式，就是連續性之信仰，这信仰很难用不可辯駁的推理去証实，但是如果沒有了它，則一切的科学也就不可能了。最后，凡是能应用概率計算而有效果的問題，都是其結果不依存于初时假設的問題，只要这假設滿足連續条件。

第十二章 光学与电学

弗勒納尔的理論——人們所能举的最好的例子① 就是光的理論及其与电学之关系。有賴于弗氏，光学才变成物理学中最進步的一部分；所謂波动說实在是滿足人意的整个理論；但我們不可向它要求它所不能給我們的东西。

数学理論不是以揭示我們事物的真正性質为目的；如有这种奢望那就未免不合理了。它唯一的目的，只在整理实驗所告訴我們的物理定律；然而如果不靠数学，則我們連这些定律都將說不出來。

以太真正存在与否，这都与我們沒有大关系的，这是玄学家的事情；在我們最要緊的，就是我們可以把它当作存在的，而这个假設頗便于解釋許多現象。最后，我們还有無别的理由可以相信物質的东西之存在呢？ 这也不过是一种便当的假設；但这是永远如此便当的，而总有一天以太会成为無用而被拋棄了的。

① 这章是我所著的下列二書中序文的摘錄：光之数学理論（Paris, Naud, 1889)及电学与光学(Paris, Naud, 1901)。

然而就是有那一天，光学定律及其解释的方程式还会是眞实的，至少是第一次近似的。所以研究那联絡这些方程式的学說总是有益的。

波动理論就是建立在一种分子的假設上的；有些人相信这样就把藏在定律里的原因揭發了，他們以为这是有益的；有些人以为这正足以引起怀疑；然而我以为这种怀疑与前面一班人的幻覺，都是不大对的。

这些假設的作用是次要的，人們可以牺牲了它們；普通人們总不这样去做，因恐失去陈述上的明晰性，而这就是唯一的理由。

事实上，人們如仔細去观察，則見人們所借用于分子假設的不过二事：能之守恒原理和方程式的綫性形式，这些方程式表示微小运动的普遍定律，有如一切小变动的普遍定律。

这可以說明何以人們采用光的磁电理論时，弗氏的結論大部分仍可以無变动而存在。

麥克斯韋的理論——大家知道本來互不相干的光与电的密切关系一直要等麥克斯韋才把它們联絡起來。这样，基礎虽是更寬大，進入更高的和諧中，但是弗氏的光学还是生动的。它的各部分还是存在，而其相互的关系还是一样的。不过，我們講解时的語法已变了，另方面，麥氏更發明了許多前人未曾發現的电与光之各部分的关系。

法國的讀者第一次展开麥氏的書时，便覺有所不安，甚至往往贊美的感情与怀疑的感情参半。要費許多的努力与長久的牺牲，这种感情才逐漸消滅。有些高明人甚至把它永久保存着。

为何这位英國学者的思想在我國这样难得同意呢？無疑的，这是因为大半有知識的法國人所受的教育使他們爱好精确与邏

輯，先于其他一切特性。

在这方面，古傳的数学物理的理論足使我們完全滿意。我們所有的老师，自从拉普拉斯(Laplace)直至哥希(Cauchy)都是用同一的方法去研究。他們从一种很明晰陈述的假設出發，而引出一种有如数学嚴密性的結果，然后，再借实驗以为比較。他們好像要把物理的各部分都給以有如天体力学的精密性。

对于性喜这种模范的人，凡是一种理論总难于使他滿意。他不特不容許有一点矛盾的地方，还要各部分都合乎邏輯地联絡起來，并且要不同的假設愈少愈好。

还不只此，他还有别的要求，这是我以为不大合理的。在我們能够感触到的和实驗使我們知道的物質之后，他还想看見一种别的物質，在他以为唯此才是真实的东西，而这种物質所有的只是純粹几何的特性，其原子只是按照动力学公律而移动的数学点。明知这些原子是無形無色，但因一种不知不覺的自相矛盾，他想把它們表現出來，因此使其更加接近尋常的物質。

这样他才完全滿意，并且以为鑽進宇宙的秘密了。即使这种滿意是騙人的，但他也不容易改变这种想头。

因此，当一个法國人展讀麥氏的書时，他期待着可以找到好像建在以太假設上的物理光学那般精密而有邏輯的理論；这样他未免要大失所望，这是我要即刻奉劝讀者务必避免的，同时告訴他哪些是应在麥氏書中尋求的，哪些是不应尋求的。

麥氏对于电与磁并沒有力学的說明；他僅限于說这个說明是可能的。

他也指明了光学現象不过是磁电的特殊現象。所以人們可从所有电之理論中，直接推出关于光之理論。

不幸这个道理倒过來講就不对了，从完全的光之理論中，往往不容易引出关于电学現象的完全解釋。人們如从弗氏理論起始，这更是特別不容易了。这一定幷不是不可能，但人們总要問从前所有認为决無变更而可贊美的結果是否勢必一齐拋去。这好像是倒退一步了，因而是許多高明的人不能容忍的。

讀者就是無奢望时，他还免不了別的困难，这位英國学者不是要建立一座唯一的、最后的、布置極好的大厦，这不过好像他建了許多暫时的而独立的建筑，在这些建筑中交通甚是困难，有时竟不可能。

我們試举一例，例如有一章論靜电引力可用介电媒質中的張力与压力來說明。如把这章删了之后，其余的不見得就不明白和不完全；幷且另方面，这章自有它的理論，人們不看它的前后文就可懂的。但是这章不僅是独立的，幷且与全部書中的基本意义难于融合。麦氏幷不想融合，他只限于說："我未能再進一步，即我不能用力学來說明介質的应力。" (I have not been able to make the next step, namely to account by mechanical considerations for these stresses in the dielectric.)

这个例子足以說明我的意思，其实我可以举許多別的例子。譬如人們讀到磁性旋光偏振現象时，誰还疑惑光的現象与磁的現象有相同之处。

所以人們不要以为避免了矛盾，自己总要有一个主張才行。其实，兩种矛盾的理論，只要人們不把它混合，幷且不要問事物的究竟如何，都可以做研究的有益工具，如果麦氏沒有开了那么多的新歧路，則讀他的書时所能引起的思路一定較少。

然而这样則基本观念未免稍被遮盖了。这种的情形尤以在通

俗的書籍中为最，这是唯一被放棄的一点。

所以我相信应該解釋这基本观念之內容，以更顯明其重要性。为此，加一節插話是必要的。

关于物理現象之力学的解釋——凡在物理現象中总是有一些参变数是实驗可直接达到而可測量的。我名之曰参变数 q。

其次由观察使我們知道这些参变数变化的定律，这些定律普通可用那联絡其中参变数 q 与时間之关系的微分方程式表示。

倘若把这种現象給以一种力学的解釋，那將怎样做呢？

那么人們將或用普通物質的运动或用一种或数种假想的液体的运动來解釋它。

这些液体將認为極多数孤立的分子 m 所組成。

那么我們何时可以說我們有了某現象的完全的力学解釋呢？这一方面要待我們知道了这些滿足假想分子 m 的坐标的微分方程式，这些方程式且当符合动力学原理；另方面，要待我們知道了那規定分子 m 的坐标为参变数 q 的函数的关系，这些参变数 q 是可由实驗求得的。

我已經說过，这些方程式是要符合动力学原理的，特别地要符合能之守恒原理和最小作用原理。

由第一原理可知总能是常数，且可分为二部分：

一、动能(energie cinétique)或活力(force vive)，其强弱依存于那些假想分子 m 的質量及其速度，我名之曰 T。

二、势能(energie potentielle)只依存于这些分子的坐标，我名之曰 U。此 T 与 U 兩能之和才是常数。

現在要問極小作用能告訴我們什么？它說那系統如要从它在 t_0 时所占的初时位置，移到它在 t_1 时所占的最后位置，它所走的路

徑必使在那从 t_0 时到 t_1 时的过程中“作用”之平均值(卽 T 与 U 二能相差数)为最小。况且第一原理实卽第二原理的后果。

如果人們知道此 T 与 U 二函数，这个原理就足以确定运动方程式。

在所有由此地來到彼地的各种路徑中，自然有一条路可使作用的平均值比任何路徑的平均值为小。而且只有一条路，因此極小作用原則足以确定所經歷的路徑以及运动方程式。

这样，人們就求得所謂拉格朗日(Lagrange)方程式。

在这些方程式中，独立的变数卽是假想的分子 m 的坐标；但現在我假定以直接可由实驗求得的参变数 q 为变数。

于是这兩部分的能量当表現为参变数 q 的函数及其導数；自然实驗家所看見的是这样的形式。他当然想用他能直接观察的数量以定势能和动能①。

如是則系統从此情形变到另一情形所走的路徑必須使其平均作用为最小。

現在不管 T 与 U 是否用参变数 q 及其導数表示的；不管我們是否利賴这些参变数以規定起点与終点的情形；極小作用的原理总是真实的。

所以，在一切由此位置來到另一位置的路徑中，此地仍只有一条路能使平均作用为最小。因此極小作用原理足以确定那些規定参变数 q 的变化的微分方程式。

这样求出的方程式是拉格朗日方程式的另一形式。

为要組成这些方程式，我們不必知道这些参变数 q 与假想分

① 我們补充說 U 只依存于 q，T 依存于 q 及其对于时間的導数，且对于導数为二級齐次多項式。

子的坐标的关系，这些分子的質量，以及做为这些分子的坐标的函数的 U。我們所要知道的，乃是做为 q 的函数 U 的表式和做为 q 与其導数的函数 T 的表式，就是說做为实驗数据的函数的动能与势能的表式。

于是不外乎兩件事，或是函数 T 与 U 旣已合式的选擇了，有如吾人剛才說的那样建立起來的拉氏方程式將与实驗求出的微分方程式全同；或是幷無函数 T 与 U 可以有这样符合的。在后一种情形时，自然就不可能有一个力学的解釋了。

使力学的解釋是可能的必需条件，是在能够选定函数 T 与 U，使旣滿足極小作用原理，又能引出能量守恒原理來。

这个条件也是充足的；試設想我們找得了含参变数 q 的函数 U，它表示一部分的能，而以 T 表示其他部分，T 为参变数 q 及其導数的函数；又假定这函数对于这些導数为二齐次多項式；最后，假定以 T 与 U 兩函数所組成的拉氏方程式能与实驗数据相符合。

要怎样才可以从中引出一种力学的解釋呢？这必須 U 可認为一系統的势能，而 T 可認为同一系統的动能。

关于 U 是不难的；但是 T，是否可認为一物質系統的动能呢？

那是很容易証明这总是可能的，甚至有無窮的方法。我只限于請讀者参閱我所著的电与光一書的序言以求詳細。

这样我們如不能滿足極小作用原理，就無力学解釋之可能；如能滿足这原理，那就不單有一个，且有無窮个的解釋，因此，一待有了一个解釋，就有其他無窮的解釋。

于此还有一个注意。

在由实驗直接告訴我們的数量中，有些被我們認为我們假想的分子的坐标的函数；我們的参变数 q 就是这种；我們把别的不但

看做依存于坐标且依存于速度，或同样的可說是依存于 q 的導数或为这些参变数及其導数的組合。

于是就生出一問題；在所有实験測得的数量中，我們將选何者为参变数 q？我們將願意以何者認为这些参变数的導数？这种选擇仍有極大的任意性，但只要合乎極小作用原理，以求力学解釋之可能就够了。

于是麦克斯韋曾經自問过能否做这种选擇，以及 T 与 U 的二能之选擇，使电之現象满足此原理。由实驗我們知道电磁場之能可分为二部分，即靜电能与动电能。麦氏曾認明如我們把第一認为势能 U，第二認为动能 T；另方面，如靜电荷認为参变数 q，而电流强度認为其他参变数 q 的導数；在这情形之下，我就要說，麦氏曾認明电之現象满足極小作用原理。由是一定有一力学的解釋之可能。

他如果不把这意思放在第二卷書中偏角的地方而放在第一卷起始之处，則大半的讀者便不致忽略它了。

所以如果一現象可有一完全的力学解釋，則亦有無窮別的，都也可以解釋实驗所揭發的特点。

这是被物理学中各部分之歷史所証实的；譬如，在光学中，弗氏以为顫动是垂直于偏振平面的；紐满(Newmann)則以为是平行的。好久人們就想一"交叉实驗"以决定这兩理論孰是孰非，但人們始終未能求得。

同样，即在电学里，那二流体与一流体的二理論也都能满意地說明靜电学中观察所得的定律。

利賴了我剛才提起的拉氏方程式的特性，所有这些事实都可容易解釋。

現在很易明白麦氏的基本观念了。

为要証明电之力学的解釋之可能性，我們不必先去找这解釋之本身，我們只要知道 T 与 U 二函数之表式（此乃能之兩部分），用这兩函数可組成拉氏方程式，并把这方程式和实驗的定律相比較。

在这些可能的解釋之中，怎样作一种缺乏实驗帮助我們的选擇？或者有一天物理学家將不理会这些不可用積極的方法解决的問題，而把它們抛給玄学家。这一天尚未到；而人們不是这样容易永不明白忍耐着事物的本質的。

我們的选擇只能以个人的观察占主要成分的考慮为嚮導；但也有些答案是大家棄而不用的，因为太古怪了，也有的是大家爱重的，因为它們是簡明的关系。

关于电与磁，麦氏不作任何选擇。这不是因为他系統地輕視積極的方法所不能达到的一切东西；我們只看他对于气体运动論所費的时間就可相信了。我还要加說，虽然在他的大著作之中他不开展一点完全的解釋，但他在以前曾在哲学雜誌的一文中曾試給这种解釋。以前他不得已做的假設之奇怪和复雜使他后來又棄而不用它們了。

同样的精神，可在全部書中見到。其中最主要的，亦卽各种理論应該公有的，都已闡明；凡只能合乎一种特殊的理論的地方無不默默而过。因此讀者面臨一种几乎內無实物的形式，这在起初还被他当作不可捉摸和飄忽無定的影子。但他所費了的努力使他迴思，而結果他明白了他从前所称贊的整个理論中，总有些人为的地方。

第十三章　电动力学

电动力学的歷史对于我們的观点特别有益。

安培(Ampère)曾把他的不朽的著作叫做"唯一建立在实驗上的电动力学現象之理論"。因此他以为絲毫不曾做有假設；然而不久我們將知他是做了的，只是他做而不自覚罢了。

他的后輩反看得很淸楚，因为安培答案的弱点引起了他們的注意。他們做了些新的假設，他們这次却完全自覚的了；但这是經了多少次数的改变才到了今天恐还未固定的經典系統，这就是我們要去研究的。

(一)安培的理論——当安培試驗电流的交互作用时，他只將而且只能对合閉电流(courants fermés)試驗。

这不是他否認开放电流(courants ouverts)之可能性。設有二導体負有不同的电荷，如把它們用金屬綫連接起來，則生出由此到彼的电流，一直等到兩者的电位相等后方止。

在安培时代，一般意見以为这是开放电流；因为人們只是看見电流从第一導体流向第二導体，而不見有电流从第二導体流回第一導体。

因此安培就以这种的电流認为开放的，例如蓄电器放电时所生的电流，但他不能用它做試驗，因为經过的时間太短了。

人們另可想出一种开放电流。我假定有A，B二導体，用AMB綫接通。起初有些运动的小導体与B接触，取得其中一部分的电荷，乃离开B的接触，而按着BNA的路綫运动，于是从这里帶來电荷，來到A的接触便放棄这电荷給A，这电荷就由ANB路回到

B。

这里在某种意义上，是一种合閉电路，因为电流循 $BNAMB$ 路而行；但此电流之兩部分均極不同。在 AMB 綫上，电經过一固定的導体，其情形如尋常伏特电流(courant voltaïque)，遇到欧姆电阻而發热；人們叫它導电移动。在 BNA 部分中，电是由一移动的導体所运輸的；人們叫它运輸移动(par convection)。于是，如果把运輸电流認为与導电电流完全相同，則 $BNAMB$ 电路是合閉的；反之，如运輸电流并非"眞正电流"，譬如它对于磁鉄是無作用的，那就只剩導电电流 AMB，它是开放的。

例如，用一綫联絡霍子(Holtz)起电机的兩極，其中荷电的旋轉板用运輸电流法把此極的电运輸到彼極，然后再經过此綫的導电，回到第一極。

然而这一种的电流極微，要它强度可观是很难实現的。照安培当时所具备的方法，人們可說这是不可能的。

总而言之，安氏可以想像兩种开放电流的存在，但这兩种都不是他所能利用來試驗的，因为它們太弱或歷时太短。

所以試驗只能告訴他合閉电流对于合閉电流的作用，或嚴密点說，合閉电流对于一部分电流的作用，因为人們可使电流通过一合閉的电路，其一部分是可动的，一部分是固定的。于是人們可以研究可动的部分受合閉电流的作用而移动的情形。

反之，安培毫無方法研究开放电流对于合閉电流，或对于另一开放电流的作用。

(1) 合閉电流之例——安培試驗二合閉电流之相互作用时，曾得許多非常簡明的定律。

我姑且把与下文有关的定律，簡括的說出來。

一、如果电流强度是保持不变的，又如这兩电路在受了一种移动与变形之后，仍归原狀与原地，則电动力的总功必为零。

換一句話說，其中必有兩电路的电动电势(potentiel électrodynamique)，此电势与兩电流强度之積成正比例，又依存于电路的形式及其相对的位置；电动作用的功等于此电势的变化；

二、电流經过合閉的螺綫管的作用为零；

三、电路 C 对于另一伏特电流的电路 C' 的作用，僅依存于这电路 C 所發展的“磁場”。事实上，在空間各点，人們可以規定有一定方向和数量的磁力，此力有下列特性：

(a) C 对于一磁極所作用的力是施在这磁極上的；其量等于磁力乘磁極之磁量；

(b) 一根極短的磁針有傾向磁力的趋势，使做这种傾向的偶力与磁力、磁針的磁矩及其偏轉角之正弦成正比例；

(c) 如果电路 C' 移动时，則 C 对于 C' 所生电动作用的功等于穿过此电路的“磁力通量”的增量。

(2) 合閉电流对于一段电流之作用——安培既未能实現一种眞正的开放电流，所以只好去研究合閉电流对于一段电流的作用。

其法卽用电路 C' 作实驗，此电路分固定与可动的兩部分。可动的一部分譬如是一条可动的綫 $\alpha\beta$，其兩端 α 与 β 可在一固定綫上移动。在可动綫的兩位置之一，α 端是停在固定綫的 A 点上，而 β 端則停在固定綫的 B 点上。电流由 α 到 β，卽先在可动綫上由 A 至 B，再在固定綫上由 B 至 A。故此电流为合閉的。

在第二位置时，可动綫既經移动，則其 α 端移到固定綫上的 A' 点，β 端移到固定綫上的 B' 点。于是电流由 α 流到 β，卽先沿可动綫由 A' 至 B'，然后沿固定綫由 B' 回到 B，再由 B 到 A，最后

由 A 到 A' 一路总是沿着固定綫。故电流仍是合閉的。

如果这样的电路受合閉电流 C 的作用，則其可动的部分好像受外力而移动。安培承認这可动的部分 AB 好像受到的表观力量，既代表着 C 对于部分电流 $\alpha\beta$ 的作用，又与假定通过 $\alpha\beta$ 的电流是开放的所受的力量相同，这时电流將停在 α 与 β，非如合閉电流，在到了 β 以后，仍沿电流的固定部分回到 α。

这个假設似乎是很自然的，而安培做的时候并不自觉；但它并不是强迫的，因为稍迟就可知道亥尔莫慈要抛棄它。然而無論如何安培虽未能实現开放电流，但这假設能使安培發現許多合閉电流对于开放电流的作用或对于一極小部分的电流的作用的定律。

这些定律还是很簡明的：

一、对于極小部分的电流的力是施在这上面的；此力与电流和磁力成直角，且与垂直于电流之磁力分量成正比例；

二、一自閉的螺綫管对于極小部分的电流毫無作用。

但这里再也沒有电动电势了，就是說：保持常定强度的开放电流与关閉电流归还原地时，总功不等于零。

(3) 連續的旋轉——在电动力学中最有趣的实驗是能实行一种連續旋轉的实驗，有时人們称这种实驗为單極感应(induction unipolaire)。一磁針可繞其軸而轉，一电流起初通过一固定綫，進入磁針的北極 N，經过磁針之半段，再由一可滑移的接触点流出，而進入固定的綫。

于是磁針旋轉不已，永不能达到平衡的位置。这是法拉第試驗。但这是怎样一回事？如果这是二种定形的电路，一是固定的 C，一是可繞軸而轉的 C'，則这后者之旋轉，永不会連續的。其实，这里有电动势存在，故必有一平衡的位置，这將是电势極大之处。

所以連續的旋轉，除非C'包含兩部分方才有可能：其一是固定的，其二是可繞軸而动的，有如法拉第的試驗。不过还要有一个区别，卽由固定的部分來到可动的部分，或反之，都是可能的，或用簡單的接触法（固定的部分的同一点与可动的部分的同一点永相接触），或用可滑动的接触（可动的部分之同一点依次与固定的部分之各点相接触）。

那种連續的旋轉僅在第二情形中才有可能。在那时候，系統漸趋于平衡，但是，当它將达到这点时，那滑动的接触物能使轉动部分与固定部分的一新点交通；它更換着联絡，所以它也更換各种平衡的条件，因此，可說系統总追不到它所要赶上的平衡位置，而那旋轉現象就可無窮地持續下去。

安培承認电路对于C'的可动部分的作用，卽等于C'之固定的部分不存在时那样，因此亦卽等于流通于可动部分的电流为开放时那样。

所以他結論合閉电流对于开放电流之作用，或反之开放电流对于合閉电流之作用，可生連續的旋轉运动。

然而这种結論依存于我剛才所說的假設，并且未經亥尔莫慈所承認，这是我在上面已經說过的了。

（4）二开放电流的相互作用——关于二开放电流的相互作用，尤其是关于二極小部分电流的相互作用，無論什么試驗都不行。安培曾求助于假設。他假定：第一，二極小部分的电流之相互作用可縮为在二者相联之直綫上之一力；第二，二極小部分合閉电流之相互作用是这些極小部分之总合作用，而这些作用有如在各部分是孤立时所發生的。

最可注意的，卽在此地安培又作了这兩个假設，而自己还不知

道。

虽然，把这兩种假設与关于合閉电流之試驗綜合起來，足以完全确定二極小部分之相互作用。

但是这样，那我們在合閉电流的情形中所遇着的簡單定律大多数又是不眞实了。

第一，是沒有电动势；而我們已知在合閉电流对于开放电流發生作用时，亦無此种电势。

其次，眞正說起來，是沒有磁力的。

其实关于这个力之定义，我們在上文已給了三种：

一、磁極所受之力；

二、旋轉磁針之偶力；

三、一極小部分电流所受之力。

但是，在我們現在所討論的情形中不但这三种定义不再相互符合，并且每一种都是毫無意义的，而事实上：

一、一磁極所受之力不僅限于一种施于此極的力。其实，我們已知一極小部分电流对于磁極之作用，并非施于極点，乃是施于此小部分上的；这个作用本可用一偶力与一施在磁極上的力代替。

二、这对于磁針所生的偶力不僅是定向的偶力；因为它对于針軸之力矩并非零。此力可分为一眞正定向的偶力，与一补充偶力，此最后力足以促起磁針之連續的旋轉，这是我在上文已說过的。

三、最后，極小部分电流所受之力并不垂直于此部分。

换言之，磁力之統一性已消滅了。

且看这統一性是怎样一回事。如兩系統对于一磁極發生同一的作用，則对于一無窮小的磁針亦有同一的作用 对于放在以前磁極所占之位置的極小的部分电流亦然。

那么，倘若这两系統僅含合閉电流，这就对了；依照安培的道理，如这两系統所含的是开放电流，这就不对了。

人們只要注意，譬如一磁極是放在A点，又有一極小的部分电流是放在B点，而这部分之方向既是在AB引長綫上，則此部分对于磁極是毫無作用，然对于放在A点之磁針或放在A点之極小部分电流，則有作用。

(5) 感应——人們知道自从安培不朽的著作發表之后随即有电动感应(induction électrodynamique)之發現。

这个現象只要是由于合閉电流而生，則毫無困难，并且亥尔莫慈曾注意到，只須根据能之守恒定律，已足把那些感应的定律由安培的电动定律推引而出。不过还有一个条件，就是要另外承認許多假設，白德安(Bertrand)先生曾將此層示明。

关于开放电流，亦可用同一原則，求得此种推論，虽然人們当然不能將所得的結果証之以实驗，因为人們不能实現这种的电流。

人們如將此种分析方法应用在安培的开放电流的理論上，可得許多令人奇异的極好結果。

第一，感应現象是不能用学者与实驗家的著名的公式由磁場变动現象推引而出，而且其实我們上文已說过，眞正講起來，已經沒有磁場了。

但是另有一件事情。今有一电路C受可变的伏特系統S(système voltaïque)之感应；如此S系統自己行动并任意变形，此系統之电流按任何定律变动，但变动之后，仍回复原位，那自然要假定**平均的**感应电动勢(la force électromotrice moyenne induite)在电路C中为零。

如果这C电路是合閉的，且S系統僅有合閉电流，那么这就眞

实了。当有一开放电流时,如果人們承認安培的理論,那就不眞了。所以,就这字的任何普通意义而言,感应不但將不是磁通量之变动現象,且亦將不能用任何物之变动來表示。

(二)亥尔莫慈之理論——关于安培理論之后果和他怎样解釋开放电流,我已申述了一番。

对于那些人們推出來的命題之荒謬与人为实在是不难察知的;因此人們想"一定不是那样"。

由此人們可以想像亥尔莫慈另走别路的动机了。

亥氏不用安培的根本假設,这个假設卽兩微小部分电流之相互作用可幷成一力,此力在兩者相联之直綫上。

他承認一微小部分电流不僅受一个力,且有一偶力。正为了这一点,才發生亥氏与白氏之有名的筆墨官司。

亥氏把安培的假設代以下面的假設:二微小部分电流总可有一电动势,此电势僅依存于其位置和方向,而兩者相互施加的力之功等于此电势的变量。所以亥氏也和安培一样,是不能不做假設的;不过,至少他非明白地說明才不做。

在那唯独可实驗的合閉电流的情形中,这兩种理論是相合的,在其他的情形中就有区别了。

第一,合閉电流的可动部分所受之力与將此部当作孤立的且認为开放电流时所受之力不同,这同安培的假定的适相反。

現在我們再把上面的 C' 电路來談罢,此路原是由 $\alpha\beta$ 可动綫滑动在固定綫上而成;在唯一可以实行的試驗中,$\alpha\beta$ 綫不是孤立的,而是合閉电路的一部分。当它从 AB 移到 $A'B'$ 时,电动势之变动可分为二因:一、因为 $A'B'$ 对于 C 的电势有异于 AB 对于 C 的电势,故此电势受了第一种增量;二、因为此外还要加上 AB 与

$A'B'$ 各个对于 C 的电势，故此电位受了第二种增量。

AB 部分所受之力的功，即此种双重的增量。

反之，如 $\alpha\beta$ 为孤立的，则电势只受第一种增量，而僅是这第一种增量代表 AB 所受力之功。

第二，如果沒有滑动接触，则無連續旋轉之可能；事实上，这是由电动势之存在而得的后果，我們在談合閉电流时已說过了。

在法拉第試驗中，如果磁鉄不动，且如磁鉄外之电流通过可动綫，則此可动綫將旋轉不已。但这不是說如果將磁鉄与綫分离后，而將开放电流通过綫时，此綫仍將旋轉不已。

由此可見一孤立的微小的部分电流所受力与屬于合閉电路的可动的部分所受力不同。

此外还有区别：按照实驗与那兩种理論，凡一合閉的螺綫管对于合閉电流之作用为零；它对于开放电流的作用，根据安培为零，根据亥氏为非零。

由是乃得一重要之后果。我們在上文講过三种磁力之定义；第三种在此毫無意义，因为一微小部分电流不再受着唯一力。第一种亦無意义。事实上，何为磁極？这是一無窮長的綫形磁鉄的極端。此磁鉄可代以無限長的螺綫管。故欲磁力的定义有意义，則开放电流对于無限長的螺綫管的作用，須僅依存其極端之位置，就是說对于合閉的螺綫管的作用为零。但是我們剛才已知道，这不是眞的。

反之，我們尽可采取第二种定义，它是建立在那定向偶力之測量，此力引起磁針之轉动。

但是，倘若人們采用这种定义，那么感应作用与电动效应都將不僅依存于此磁場之力綫的分布了。

（三）这些理論所引起的困难——亥氏的理論比安培的理論可算進一步了；但要所有的难題都能解决才好。在这兩家的理論中，磁場这个字都是無意义的，假使我們用一种多少人为的公約給它一个意义，則那些电学家所熟習的定律就不能再适用；因此在一綫中的感应电动力，不能再以所穿过此綫的磁力綫之数來計量。

而我們厭棄的心理不但來自我們在思想上与言語上所深染的習慣。此外还有别的原因。我們如果不信超距作用（action à distance），那么解释电动現象时必借用媒質的变化。而这种变化正就是所謂磁場，于是关于电动的效应，只能依存于这种場。

所有这些困难都是來自开放电流之假設。

（四）麥克斯韋的理論——这些困难一待麥克斯韋來到后就一筆勾消。在他看起來只有合閉电流。

麥氏承認如果在介电体中电場变动时，介电体中就發生特殊現象，它对于电流計的作用与普通电流無异，麥氏叫它位移电流（Courant de déplacement）。

于是如有一綫联接兩个負有相反的电荷的導体，則在放电时，綫中必發生一种开放導电；但同时在鄰近的介电体中，發生一种位移电流，以关閉这導电。

人們知道麥氏理論可用以解释光学現象，以为它是來于極速的电振动。

在当时，这种观念只是一种大胆的假設，而毫無实驗根据的。

20年后，麥氏的观念才得到实驗的証实。赫慈（Hertz）竟能实現电之顫动系統，表演了所有光的特性，它与光的不同点，只在于波長，就是說有如紅色有别于紫色。他所做的差不多是光之綜合。大家都知道無綫电学就是从此發源的。

我們可說赫慈幷未直接証明麥氏的基本观念，即位移电流对于电流計的作用。在一方面，这是不錯的，总之他所直接指明的，就是电磁的感应現象之傳播速度不像人們以前相信是無窮大的，而是等于光速。

不过，今如假定位移电流不存在，而感应傳播速度等于光速，又或假定位移电流發生感应效应，且感应之播速为無窮大，这都是一样的。

这个道理人們在起初是看不見的，但可用分析法以証明，可是我不能在此概述。

（五）何浪（Rowland）实驗——但是我上面已經說过有兩种开放導电：第一就是蓄电器，或某導体放电时所發生的电流。

其他情形有如电荷通过一自閉的導圈，它移动时，在电路的一部分为傳導的，在另一部分为运輸的。

关于第一种的开放电流，問題可算解决：因位移电流把开放电流关閉。

至于第二种的开放电流，其答案似乎更簡便；倘若电流是合閉的，則这也似乎只有被运輸电流的本身关閉。为此，只須承認“运輸电流”即在移动中的荷电導体，可以作用着电流計。

但过去尙少經驗的証实。事实上，即使尽量加增導体的电荷与速度，仍似难于得到足够强的电流。

这是何浪極能干的实驗家首先战勝了这些困难。其法用圓盤收集了極大的电荷幷具有極大的轉速。旁边有一个無定向的磁系統就受到影响而偏轉。

何浪曾做过兩次試驗，第一次在柏林，第二次在巴尔地摩（Baltimore）；其后又有希姆斯得脫（Himstedt）繼續試驗。这兩位物

理学家竟声称他們曾做定量的測定。

何浪这条定律曾被所有物理学家所承認而無异議。

而且好像一切都証实这条定律。电花当然發生一种磁的效应;但是,电花放电豈不像是从某电極上撥下的荷电粒子而轉运到另一电極所成嗎? 試看电花的光譜,可見其中有电極的金屬体的譜綫,这不是証据嗎?然則电花是眞正的运輸电流(courant de convection)了。

另方面,人們也承認在电解液中,电流乃是被离子所运送。所以这液体中的电也必定是运輸电流;但是,它对于磁針發生作用。

陰極射綫亦复如是,克洛克斯(Crookes)說这是一种微妙的含有負电荷的物質,且有極大的速度;換言之,他以为这是运輸电流,他的这种見解虽經一时的反駁,然如今已处处被采用了。但是,这些射綫可被磁鉄所偏轉。根据主反作用的原理,这些射綫亦当偏轉磁針。

不錯,赫慈曾相信証明了这些陰極射綫不能运送負电,且对于磁針毫無作用。但他是錯了;第一白漢(Jean Perrin)曾收集了这种射綫所荷的負电,这是赫慈認为不存在的。这位德國学者之錯誤似乎由于X光綫之效应,而这在当时尙未發現。其次,最近已有人發見陰極射綫对于磁針的作用,并且看清赫慈的錯誤所在了。

这样,电花,电解液中之电,陰極射綫,这些現象都被認为运輸电流,对于电流計都有同样的作用,且合乎何浪定律。

(六)罗倫慈理論——不久人們又有更進一步的理論。根据罗倫慈的理論就連導电电流也是一种运輸电流:他以为电是永久不可分解地寄托在一种小物質的粒子上的,名曰电子(electron);伏特电流即是这些电子通过物体时所生,而導体与絕緣体之区別便

在于一种能讓这些电子通过，另一种則能阻止它运行。

罗氏的理論是很引动人的，它能簡單地解釋旧式理論和甚至麥氏的原始理論也未能完滿解決的一些現象，例如光的行差現象(l'aberration)光波的部分的牵动，磁偏振現象和齐門現象。

有些反駁还是存在着。在某系統中所生的現象似与其重心的絕对速度有关，这是与我們对于空間相对性的观念相反的。对克雷門(Crémien)先生的論見，立普曼(Lippmann)先生曾把这种反駁明顯地陈述出來。設有二荷电導体，并具有同一的移动速度。它們是相对地靜止；然而它們的每一个等价于一运輸电流，它們当相互吸引，而人們如測量此吸力，就可測得它們的絕对速度。

罗倫慈一派人回答說，不然；人們这样測量的，不是絕对的速度，乃是对于以太的相对速度，因此相对論仍是保持着。其实从此罗氏又尋到一种更为微妙的，但更使人滿意的回答。

無論这些最后的反駁如何，电动力学的大部至少在主要方面是完全成立了；一切都呈現一种使人滿意的現象；至于安培与亥尔莫慈的理論原是为开放电流而做的，到現在这种电流已不再存在，所以这些理論也只有歷史价值了。

但是这些变迁的歷史，对我們未尝無益；我們借此可以知道学者是如何易受欺騙并且要怎样才有逃避它的希望。

第十四章　物質的究竟[①]

近年來物理学家宣称的最驚人的發現，是卽物質不存在。我們要赶快說这个發現还不是最后的。物質的最主要的特征，就是

① 参閱黎朋著：物質的進化(L'évolution de la matière, Gustave LeBon)。

它的質量和慣性。这質量是到处永久不变的，尽管化学的轉变改变了物質的一切可感的特性而似乎变成完全不同的东西，但質量終是不变的。所以如有人証明物質的質量与惰性实在不是屬于物質的，而以为这不过是它的一种裝飾，甚至那最是永恒的質量也是可以改变的，那么人們就可說，物質是不存在的。而人們所宣称的，正就是这一点。

我們至今所能观察的速度都是很微弱的，因为那些使我們所有的汽車望塵莫及的天体，其速度在每秒中亦不过 60 或 100 仟米；不錯，那光的速度是較大 3 千倍，但这不是物質在移动，这是經过相对的不动質体时的擺动現象，有如洋面上的波浪。凡是在这些小速度的現象中作观察时，物質都指出質量是不变的，但从沒有人問过在較大的速度时，也是如此否？

倒是这些無窮小的东西反打破最快的行星，卽水星的紀錄，我是說那些在陰極射綫与鐳射綫中运动的微粒。人們知道这些射綫眞是來自分子轟击。由此而射出的微粒都荷有負电，这是人們可用法拉第筒收集而証实的。因为它們有了电荷，所以要受磁場或电場的偏轉，而由这些偏轉的比較，我們乃知其速度及其电荷与質量之比。

但是，由这些測量我們可以知道它們的速度是極大的，其速度約为光速十分之一，或三分之一，比星球要快千倍；而另方面，它們的电荷比較它們的質量是非常之大的。所以每一行动中的微粒可代表一种可观的电流。但是我們知道电流有一种特殊的慣性，叫做自感現象 (self-induction)。一电流發生后总是有一种保持不变的傾向，故当人們断絕电路以阻其通行时，乃見在断路点發生电花。由此可知电流極力保持其强度，正如一行动中的物体总有保

持其速度的傾向。所以陰極射綫中的微粒也能抵抗变更其速度之原因，这里有兩种理由：第一，由于它的眞正慣性；第二，由于它的自感現象。因为速度变更时，同时卽有电流变更。故微粒——卽所謂电子——当有兩种慣性：力学的慣性和电磁的慣性。

阿陌海姆（Abraham）先生与高夫芒（Kaufmann）先生，一位是計算家，一位是实驗家，曾协力做这兩慣性的研究。因此他們不得不承認一种假設；他們想所有負电子都是一样的，它們有同一的电荷，必然是不变的，我們所察覚它們的不同僅是由于那些它們运动的速度。当速度变更时，眞正的質量，卽力学的質量不变，这可說原是它的定义；但是有助于表观質量的电磁慣性，則随其速度按某定律而增加。所以在速度与电荷对質量之比的兩者之間必有一关系式，而我們剛才說过，这些数量都可由光綫經过磁場或电場时所受之偏轉計算而得；此关系的研究就可确定这二种慣性的分量。这結果眞是可驚：眞正的質量等于零。这自然应該承認起初的假設，但是理論上的曲綫与实驗上所得的曲綫的符合程度相当大，以致这个假設是很可能的。

所以这些負电子沒有眞正的質量；它們所以似乎具有慣性，是在它們变动速度时必擾乱以太。它的表观慣性只是一种租借品，不是屬于它們的，乃是屬于以太的。但是这些負电子不全是物質；所以人們可能承認在它們之外还有眞正的物質，具有眞正的慣性。有些射綫——有如哥兒斯坦孔道射綫（les rayons-canal de Goldstein），鐳之 α 射綫——也是一些彈子，不过这些彈子荷的是正电，这些正电子也是沒有質量的嗎？这是不能說的，因为它們比較負电子重的多和慢的多。于是有二种假設可以承認；或者电子較重之故，在除了它們所借來的电磁慣性之外，它們本身有力学的慣

性，于是这就是它們才是眞正的物質；或者它們也同別的一样沒有質量，其所以似乎較重者，是因它們較小。我說比較小，虽然这种說法似乎荒謬；但因为在这种观念中，那微粒將不过是以太中的眞空，唯独它是实在的，唯独它具有慣性。

迄今物質还是沒有太連累着，我們还可采取第一种假設，甚或相信除了正的和負的电子之外尚有中性的原子。但据罗倫慈最近的研究，我們就要失去这后面的援助。地球很快的在以太中移动时，我們也在被牽动之中；光的或电的現象不会受了这种移动而变更嗎？人們相信了好久，且曾經假設，随仪器对于地球运动的方向之不同观察就会有不同的結果。其实不然，且最精密的測量也未曾得过这样的結果。这里实驗証实了物理学家的一种共同的厭惡；事实上，人們如果找到了一点东西，則人們不但將知道地球对于太陽的相对运动，且將知它在以太中的絕对运动。但是有許多人很难相信任何試驗所得的結果，除了相对运动之外，就沒有其他，他們倒很願意承認物質是沒有質量的。

所以人們对于所得負的結果并不會十分驚异。这些結果是与傳授的理論相反，但它們能滿足于在这些理論以前的一种深刻的本能。并且还要把这些理論，根据其后果而加以修改，以求合乎事实。这就是費則格好得（Fitzgerald）用一可驚的假設做过的：他承認無論何物，如順地球运动的方向而运动时，必縮短十万万分之一。圓球必变成扁橢圓球，且令其轉动时，其变形必使小軸平行于地球之速度。因为測量的仪器所受的变形与被測量的物件相同，故人們一点也不發覚什么，除非人們不留意去确定光綫經过物件的長度之时間。

这个假設可以說明观察得來的事实。然而这还不够。有一天

人們还可作更精密的观察；那时可得正的結果嗎？这些观察可以使我們測定地球的絕对运动嗎？罗氏并沒有这样想。他相信这种測定永是不可能的；許多物理家的共同的本能，以及至今各种实驗所遭失敗，都足保証他的想法。所以我們可以承認这个不可能是自然界的普遍定律；并且承認这是一种公設。然則其后果將如何？这正是罗倫玆所尋求的，他發現所有原子，所有正电子或負电子都有一种慣性，而与其速度都依同一定律变更。这样所有物質的原子都是小而重的正电子与大而輕的負电子所成，至于那可感覚的物質对于我們不像荷电，是因为这兩种的电子的数目是几乎相等之故。兩者都是沒有質量的，而只有假借的慣性。在这系統中沒有眞正的物質，而只有在以太中的孔洞。

照郎之万(P. Langevin)先生的意思，物質也許是液化的以太，并已丧失他所有的特性了；当物質移动时，这并不是这种液化的質体在以太中移动，乃是液化向以太各部分逐漸擴充的，同时在后方已变成液体的部分又漸行恢复原狀。物質在运动中不保持其原形。

这就是近來对于此題研究的梗概；但現在高夫芒先生又發表了新的試驗。速度極大的負电子，必受弗則格好得的縮小，因此速度与質量之关系亦变；但最近試驗不能証实这种預見；然則一切都要倒了，而物質又將得生存的权力。但这些实驗是不容易的，在今日要想做一个最后的結論，还是太早了。